# Novikov-Vervollständigungen und deren Anwendungen auf die geometrische Invariante

Diplomarbeit von
Pascal Schweitzer

Fachbereich Informatik und Mathematik
der Johann Wolfgang Goethe-Universität
Frankfurt am Main

Oktober 2005

# Vorwort

Die geometrische Gruppentheorie versucht bekanntermaßen Gruppen in Beziehung zu geometrischen Objekten zu setzen, um an ihnen Eigenschaften der Gruppe abzulesen. Man sucht eine unter Isomorphie invariante Eigenschaft der zugeordneten geometrischen Objekte. Die geometrischen Invarianten sind ein Beispiel für diese Arbeitsweise. Sie geben Auskunft über die Endlichkeitseigenschaften der Normalteiler mit abelscher Faktorgruppe innerhalb einer Gruppe. Sie wurden erstmals in [BNS] eingeführt und in späteren Publikationen zu den höheren geometrische Invarianten ([BiRe]) und zu Invarianten auf nicht positiv gekrümmten (CAT(0)-Räumen,[BiGe]) verallgemeinert. Es gibt, wie häufig in homologischen Betrachtungen, zwei Versionen der geometrischen Invariante, die homotopische ($\Sigma(G)$) und die homologische ($\Sigma(G; A)$), mit der sich diese Arbeit befasst.

Es ist bekannt, dass die homologische geometrische Invariante $\Sigma(G; A)$ sich durch Verschwinden der Homologie der Gruppe $G$ mit Koeffizienten in den Novikov-Ringen $\widehat{\mathbb{Z}G}_\chi$ beschreiben lässt.

**Satz** Sei $A$ ein $G$-Modul vom Typ $FP_m$ und $\chi : G \to \mathbb{R}_\infty$ ein nicht trivialer Charakter. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. $[\chi] \in \Sigma^m(G; A)$,
2. $\forall i \leq m, \quad \mathrm{Tor}_i^{\mathbb{Z}G}(\widehat{\mathbb{Z}G}_\chi, A) = 0.$

Ein Großteil dieser Arbeit besteht aus einem Beweis dieses Zusammenhangs. Er ist in Kapitel 4 gegeben und verläuft analog zum Beweis der entsprechenden Aussagen über die homotopische Version ([BiSt]).

Mit diesem Wissen entstand die Hoffnung, man könne die Vermutung über geometrische Invarianten von direkten Produkten beweisen. Dies ist aber mit dieser Arbeit noch nicht gelungen. Es wird dennoch eine Umformulierung der Vermutung in die Sprache der Novikov-Vervollständigungen gegeben. Die aus den Gruppen stammende Analogie ist das Homologie-Kreuzprodukt und die Künneth-Formel für Tensorprodukte von Kettenkomplexen. Das Problem, das bei der Übertragung auf Novikov-Vervollständigungen auftritt, entspringt der Tatsache, dass die Vervollständigung eines Produktes nicht das Produkt der Vervollständigungen der Faktoren ist. Dennoch findet man eine Einbettung der vervollständigten Faktoren in die komplette Vervollständigung.

In Kapitel 2 wird der Novikov-Ring eingeführt und es werden einige seiner Eigenschaften betrachtet. Es wird die Existenz von Nullteilern und idempotenten Elementen auf die Existenz solcher im Gruppenring zurückgeführt. Außerdem wird der Novikov-Ring von direkten Produkten betrachtet und die Ranginvarianz des Novikov-Ringes zitiert. Weiter wird eine Topologie auf den Ringelementen definiert, mit der der Novikov-Ring zu einem vollständigen metrischen Raum wird. Ebenfalls angesprochen wird die in [Ko] für diskrete Charaktere bewiesene und in [Bi 2] auf alle Charaktere verallgemeinerte von-Neumann-Endlichkeit der Novikov-Ringe $\widehat{\mathbb{Z}G}_\chi$.

In Kapitel 3 werden Bewertungen von Moduln und Kettenkomplexen eingeführt und ihre Zusammenhänge zur Novikov-Vervollständigung erarbeitet.

Diese Diplomarbeit wurde von mir, Pascal Schweitzer, selbständig verfasst. Hierzu wurden keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet.

Ich möchte mich bei Herrn Professor Robert Bieri und Herrn Jörg Lehnert für eine ausgezeichnete Betreuung und ein sehr angenehmes Arbeitsklima bedanken. Des Weiteren danke ich Herrn Patrick Schweitzer für hilfreiche Kommentare und Korrekturen.

# Inhaltsverzeichnis

# Kapitel 1

# Grundlagen

Dieses Kapitel dient dazu einige Definitionen und Resultate der Algebra bzw. der homologischen Algebra zu wiederholen.

Wir definieren $\mathbb{R}_\infty = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ als die reellen Zahlen erweitert um einen abstrakten Punkt $\infty$. Wir erweitern die Ordnung, die Addition der reellen Zahlen, so dass gilt:

$$\begin{array}{lll} \forall r \in \mathbb{R}, & r < \infty & \\ \forall r \in \mathbb{R}_\infty, & r + \infty = & \infty + r = \infty. \end{array}$$

Weiter sei $\mathbb{R}_{\geq 0} := \{r \in \mathbb{R} | r \geq 0\}$ die Menge der nicht negativen reellen Zahlen.

## 1.1 Ranginvarianz

Für einen freien Modul möchte man den Rang als die Kardinalität der Basis definieren. Diese Festlegung ist nicht immer wohldefiniert.

**1.1.1 Definition** Sei $R$ ein Ring mit 1. Dann besitzt $R$ die *Ranginvarianzeigenschaft*, wenn für alle Basen eines freien $R$-Moduln die Mächtigkeit übereinstimmt.

Die eindeutig bestimmte Mächtigkeit der Basis wird als $R$-Rang des Moduls bezeichnet. Es gibt Ringe, z.B. den Endomorphismenring eines unendlich-dimensionalen Vektorraumes, die die Ranginvarianzeigenschaft nicht besitzen. Aus der linearen Algebra weiß man, dass Körper die Ranginvarianzeigenschaft besitzen, der Rang entspricht hier gerade der Dimension des Vektorraumes über dem Körper. Selbiges gilt für kommutative Ringe. Etwas allgemeiner erhält man:

**1.1.2 Satz** *Sei $R$ ein Ring mit 1, zu dem es einen Körper $K$ und einen nicht-trivialen Homomorphismus $\varphi : R \to K$ gibt. Dann besitzt $R$ die Ranginvarianzeigenschaft.*

*Beweis.* Angenommen der freien $R$-Modul $F$ besäße zwei Basen $\mathcal{X}_1$ und $\mathcal{X}_2$ unterschiedlicher Kardinalität. Sei $\varphi : R \to K$ ein nicht-trivialer Ringhomomorphismus. Sei $U$ der Untermodul, der von $\ker(\varphi) \cdot F$ erzeugt wird. Dann ist $F/U$ ein $\varphi(R)^{-1}\varphi(R)$ Vektorraum. Man überzeugt sich mit Hilfe der universellen Eigenschaft davon, dass die zugehörige Abbildung $\pi : F \to F/U$ jede $R$-Basis auf eine $\varphi(R)^{-1}\varphi(R)$-Basis gleicher Mächtigkeit abbildet, und dies führt zum gewünschten Widerspruch. $\square$

## 1.2 Charaktere

In diesem Abschnitt möchten wir uns mit Gruppencharakteren vertraut machen.

**1.2.1 Definition** Sei $G$ eine Gruppe. Ein *Charakter* ist ein Gruppenhomomorphismus in die additive Gruppe der reellen Zahlen $\chi : G \to \mathbb{R}$.

Da $(\mathbb{R}, +)$ eine Abelsche Gruppe ist, faktorisiert jeder Charakter durch die Abelschmachung der Gruppe. Das bedeutet, dass für jeden Charakter $\chi$ die Kommutatoruntergruppe im Kern des Charakters enthalten ist: $G' = [G, G] \subseteq ker(\chi)$. Die Menge der Charaktere bildet einen $\mathbb{R}$-Vektorraum. Seine Dimension entspricht dem $\mathbb{Z}$-Rang der Abelschmachung modulo Torsionsuntergruppe.

**1.2.2 Definition** (diskreter Charakter)

Ein Charakter heißt *diskret*, wenn $\chi(G) \subseteq \mathbb{R}$ diskret ist.

Die Multiplikation mit einer positiven reellen Zahl definiert auf $\mathbb{R}$ einen Automorphismus. Wir wollen zwei nicht-triviale Charaktere äquivalent nennen, wenn sie sich nur durch einen solchen $\mathbb{R}$-Automorphismus unterscheiden.

$$\chi \sim \chi' :\Longleftrightarrow \exists r \in \mathbb{R}_{\geq 0} \, \forall g \in G, \ \chi(g) = r \cdot \chi'(g).$$

Nach Ausschließen des trivialen Charakters identifizieren wir die Menge der zu dieser Relation gehörigen Äquivalenzklassen mit der Einheitskugel im Vektorraum der Homomorphismen von $G$ nach $\mathbb{R}$.

**1.2.3 Definition** Wir definieren die *Charaktersphäre* $S(G)$ als:

$$S(G) := \{[\chi : G \to \mathbb{R}] | \chi \neq 0\}.$$

Ist $G$ eine endlich erzeugte Gruppe, so ist $S(G)$ mit der durch den Vektorraum induzierten Topologie ein zu einer $(rk_{\mathbb{Z}}(G/G') - 1)$-dimensionalen Sphäre homöomorpher Raum.

Ist die Gruppe $G$ ein direktes Produkt $G = G_1 \oplus G_2$, so entstehen alle Charaktere als Summe von Charakteren: Ist $\chi : G \to \mathbb{R}$, dann gibt es Charaktere $\chi_i : G_i \to \mathbb{R}$, so dass $\chi((g_1, g_2)) = \chi_1(g_1) + \chi_2(g_2)$.

Man kann $S(G_1)$ als Untersphäre von $S(G)$ interpretieren indem man einen gegebenen Charakter $\chi_1 \in S(G_1)$ auf dem zweiten Faktor $G_2$ trivial fortsetzt und so einen Charakter in $S(G)$ erhält. Analog ist dies für $S(G_2)$ möglich.

Die Addition von Charakteren überträgt sich nicht sofort auf die Charaktersphäre. Die Addition ist nicht unabhängig vom gewählten Repräsentanten. Wir möchten aber auf der Charaktersphäre trotzdem eine Summe definieren. Die Summe von zwei Repräsentanten sei definiert als der positive Kegel über den beiden Charakteren:

Ist $[\chi_1], [\chi_2] \in S(G)$ so ist

$$[\chi_1] + [\chi_2] = \{[\chi] | \exists r_1, r_2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \ \chi = r_1 \cdot \chi_1 + r_2 \cdot \chi_2\} \subseteq S(G).$$

Mit der so definierten Addition gilt $S(G) = S(G_1) + S(G_2)$ in direkten Produkten.

## 1.3 Kettenkomplexe

Ein $G$-Kettenkomplex ist eine direkte Summe von $G$-Moduln, die mit einer Randoperation $\partial$ versehen sind, so dass $\partial_i \circ \partial_{i+1} = 0$:

$$\mathbf{C} = \bigoplus_{i=-\infty}^{\infty} C_i = \ldots \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \ldots$$

In dieser Arbeit werden hauptsächlich positive Komplexe ($\forall i < 0,\ C_i = 0$) betrachtet.

Mit $C^{(m)} = \bigoplus_{i=-\infty}^{m} C_i$ wollen wir das $m$-*Gerüst* bezeichnen.

Ein Kettenkomplex heißt $m$-*azyklisch*, falls für alle $i \leq m$ die Homologiegruppen $H_i(C)$ trivial sind. Für unsere Zwecke benötigen wir jedoch einen stärkeren Azyklizitätsbegriff, der nun erklärt werden soll. Er ist in [Br2] zu finden, und wird hier benutzt um Endlichkeitseigenschaften von Gruppen, die $G$-äquivariant auf Zellkomplexen operieren, nachzuweisen.

**1.3.1 Definition** Eine $\mathbb{R}$-*Filtrierung* eines Kettenkomplexes $\mathbf{C}$, ist eine Menge von Unterkomplexen $\{\mathbf{C}_r | r \in \mathbb{R}\}$, so dass $\bigcup_{r\in\mathbb{R}} \mathbf{C}_r = \mathbf{C}$ und $\forall r \leq r', \mathbf{C}_r \subseteq \mathbf{C}_{r'}$ gilt.

**1.3.2 Definition** Eine Filtrierung $\{\mathbf{C}_r | r \in \mathbb{R}\}$ eines Komplexes $\mathbf{C}$ heißt *im Wesentlichen* $m$-*azyklisch*, wenn es eine reelle Zahl $D$ gibt, so dass für alle $i \leq m$ die durch die Inklusionen $\iota : C_r \to C_{r+D}$ induzierten Abbildungen $H_n(\iota) : H_i(C_r) \to H_i(C_{r+D})$ trivial sind.

## 1.4 Auflösungen von endlichem Typ

In der homologischen Algebra verwendet man häufig Auflösungen zur Untersuchung von Gruppen. In [Br] werden diese ausführlich behandelt.

**1.4.1 Definition** Ein $G$-Modul $A$ ist *vom Typ* $FP_m$, wenn es eine projektive Auflösung

$$\ldots \to P_m \to P_{m-1} \to \ldots \to P_0 \to A \to 0$$

gibt, so dass für $i \leq m$ der $\mathbb{Z}G$-Modul $P_i$ endlich erzeugt ist.

Die Gruppe $G$ heißt vom Typ $FP_m$, wenn $\mathbb{Z}$ als trivialer $G$-Modul vom Typ $FP_m$ ist.

Ist ein Modul vom Typ $FP_m$, so ist es stets möglich eine freie Auflösung zu finden, deren $m$-Gerüst endlich erzeugt ist. Ein Gruppe ist genau dann vom Typ $FP_1$, wenn sie endlich erzeugt ist. Endlich präsentierte Gruppen sind vom Typ $FP_2$. Die Umkehrung ist falsch. Dies wurde erstmals in [BeBr] gezeigt. Hier wird die Berechnung der Endlichkeitseigenschaften für rechtwinklige Artingruppen durchgeführt. In [BuGo] wird gezeigt, dass dieses Ergebnis auch dazu führt, dass die homotopische Version und die homologische Version der höheren geometrischen Invarianten nicht übereinstimmen. (Siehe [BiSt] für eine Definition der homotopischen Invarianten.)

# Kapitel 2

# Die Novikov-Vervollständigung

In diesem Kapitel wollen wir zunächst den Gruppenring definieren und einige seiner Eigenschaften zusammenfassen. Die Novikov-Vervollständigung, die den Gruppenring als Unterring enthält, wird im anschließenden Abschnitt erläutert. Es werden einige Eigenschaften, die sich vom Gruppenring auf den Novikov-Ring übertragen lassen, aufgezeigt, das Nullteilerproblem der beiden Ringe angesprochen und eine Topologie auf ihnen definiert.

## 2.1 Der Gruppenring

Sei $G$ eine Gruppe und $R$ ein Ring mit 1. Mit $R[G]$ bezeichnen wir die Menge der endlichen formalen Linearkombinationen der Gruppenelemente in $G$ mit Koeffizienten in $R$, also

$$R[G] := \left\{ \sum_{g\in G} r_g \cdot g \,\middle|\, r_g \in R, r_g = 0 \text{ für fast alle } g \in G \right\}.$$

Die Menge $R[G]$ wollen wir nun mit einer Addition und einer Multiplikation versehen. Wir definieren also: Für $\alpha = \sum_{g\in G} a_g \cdot g \in R[G]$ und $\beta = \sum_{g\in G} b_g \cdot g \in R[G]$ ist

$$\alpha + \beta = \sum_{g\in G} a_g \cdot g \ + \sum_{g\in G} b_g \cdot g = \sum_{g\in G} (a_g + b_g) \cdot g$$

und

$$\alpha \cdot \beta = (\sum_{g \in G} a_g \cdot g)(\sum_{h \in G} b_h \cdot h) = \sum_{g,h \in G} (a_g \cdot b_h) \cdot gh.$$

Man überzeugt sich davon, dass die Menge $R[G]$ mit diesen beiden Verknüpfungen einen Ring bildet.

**2.1.1 Definition** (Gruppenring)

Der Ring $R[G]$ heißt der *Gruppenring* der Gruppe $G$ über dem Ring $R$.

### 2.1.1 Eigenschaften des Gruppenringes

- Ist $1 \in R$ die multiplikative Eins des Ringes und $e \in G$ das triviale Element der Gruppe $G$, so ist $1 \cdot e$ die multiplikative Eins des Gruppenringes. Die Abbildung $\iota_R : R \to R[G]; r \mapsto r \cdot e$ ist eine Einbettung des Ringes $R$ in den Gruppenring und die Abbildung $\iota_G : G \to R[G]; g \mapsto 1 \cdot g$ ist eine Einbettung der Gruppe $G$ in die Einheitengruppe des Gruppenringes.

- Ist $R$ kommutativ, so lässt sich der Gruppenring leicht zu einer $R$-Algebra, der Gruppenalgebra, erweitern, indem man die Skalarmultiplikation definiert durch:
$$r\alpha = r(\sum_{g \in G} a_g \cdot g) = \sum_{g \in G} (ra_g) \cdot g.$$

- Der Gruppenring hat folgende *universelle Eigenschaft*: Sei S ein weiterer Ring mit Eins, $\varphi_G : G \to S^*$ ein Gruppenhomomorphismus der Gruppe $G$ in die Einheitengruppe von $S$ und $\varphi_R : R \to S$ ein unitärer Ringhomomorphismus, dann gibt es genau einen Ringhomomorphismus $\psi : R[G] \to S$, der über die gegebenen Abbildungen und die Inklusionen faktorisiert. (Siehe Abbildung 2.1.)

## 2.2 Der Novikov-Ring

Wir wollen nun die Novikov-Vervollständigung bezüglich eines Charakters definieren. Novikov-Vervollständigungen sind Ringe, die den Gruppenring

$$\begin{tikzcd}
R[G] \arrow[dr, dashed, "\exists!\psi"] & R \arrow[l, "\iota_R"'] \arrow[d, "\varphi_R"] \\
G \arrow[u, "\iota_G"] \arrow[r, "\varphi_G"'] & S
\end{tikzcd}$$

Abbildung 2.1: Universelle Eigenschaft des Gruppenringes

enthalten. Wir sprechen daher auch von Novikov-Ringen. Sie sind selbst wiederum in einer ringähnlichen algebraischen Struktur enthalten, bei der allerdings nicht alle Elemente miteinander multipliziert werden dürfen. Dies führen wir nun aus:

Sei $G$ eine Gruppe und $R$ ein Ring. Mit $R[[G]]$ bezeichnen wir die Menge aller formalen Linearkombinationen der Gruppenelemente in $G$ mit Koeffizienten in $R$, also

$$R[[G]] := \{\sum_{g\in G} r_g \cdot g | r_g \in R\}.$$

Die Menge $R[[G]]$ wollen wir nun mit einer Addition und einer teilweisen Multiplikation ausstatten. Wir definieren also: Für $\alpha = \sum_{g\in G} a_g \cdot g \in R[[G]]$ und $\beta = \sum_{g\in G} b_g \cdot g \in R[[G]]$ sei

$$\alpha + \beta = \sum_{g\in G} a_g \cdot g \ + \sum_{g\in G} b_g \cdot g = \sum_{g\in G} (a_g + b_g) \cdot g.$$

Das Problem mit der Multiplikation entsteht dadurch, dass es nach der Multiplikation zu manchen Gruppenelementen unendlich viele Summanden geben kann, die aufzusummieren sind. Wir definieren also: Falls

$$\forall g \in G, \quad \left|\{h | a_h \cdot b_{h^{-1}g} \neq 0\}\right| < \infty,$$

so sind $\alpha$ und $\beta$ multiplizierbar und es gilt:

$$\alpha \cdot \beta = (\sum_{g\in G} a_g \cdot g)(\sum_{h\in G} b_h \cdot h) = \sum_{g,h\in G} (a_g \cdot b_h) \cdot gh = \sum_{g,h\in G} (a_h \cdot b_{h^{-1}g}) \cdot g.$$

Die in diesem Kapitel beschriebenen Konstruktionen lassen sich auch mit Moniden an Stelle von Gruppen durchführen. Viele bekannte Konzepte wie Polynomringe, Laurentpolynome und Polynomreihen lassen sich so konstruieren oder stehen in enger Beziehung zu Gruppenringen und Novikov-Ringen.

**2.2.1 Definition** (Träger)

Zu einem Element $\alpha = \sum_{g \in G} a_g g$ aus $R[[G]]$ ist der *Träger* die Menge aller Gruppenelemente, deren zugehöriger Koeffizient nicht verschwindet:

$$\operatorname{supp}(\alpha) := \{g | a_g \neq 0\}.$$

Sei $\chi : G \to \mathbb{R}$ ein Charakter. Die Menge aller Elemente aus $R[[G]]$, die zu jeder reellen Zahl $r$ nur endlich viele Elemente im Träger besitzen, deren Charakterwert höchstens $r$ ist, bildet einen Unterring.

**2.2.2 Definition** (Novikov-Vervollständigung)

Der Ring

$$\widehat{R[G]}_\chi := \left\{ \alpha \in R[[G]] \middle| \forall r \in \mathbb{R},\ \{g \in \operatorname{supp}(\alpha) | \chi(g) \leq r\} \text{ ist endlich} \right\}$$

heißt *Novikov-Vervollständigung* (oder auch Novikov-Ring) von $R[G]$ bezüglich $\chi$.

Wir überzeugen uns davon, dass man die Elemente in $\widehat{R[G]}_\chi$ tatsächlich miteinander multiplizieren kann: Sei $g \in G$, dann ist $\left|\{h | a_h \cdot b_{h^{-1}g} \neq 0\}\right| \leq \left|\{(h', h'') | a_{h'}, b_{h''} \neq 0 \wedge \chi(h') + \chi(h'') \leq \chi(g)\}\right|$, und diese zweite Menge ist eine endliche Menge.

Der Novikov-Ring liegt zwischen dem Gruppenring und den formalen Linearkombinationen: $R[G] \subseteq \widehat{R[G]}_\chi \subseteq R[[G]]$. Ist $\chi$ der triviale Charakter, so entspricht die Vervollständigung dem Gruppenring.

Wir werden ab sofort, wenn Ring und Gruppe aus dem Kontext deutlich werden, die vereinfachten Schreibweisen $RG$ bzw. $\widehat{RG}_\chi$ für den Gruppenring bzw. die Novikov-Vervollständigung verwenden.

Wir werden fortan von der Höhe eines Elementes der Novikov-Vervollständigung sprechen. Hierzu verwenden wir den Gruppencharakter $\chi : G \to \mathbb{R}$ und erweitern diesen zu einer Abbildung $v_\chi : \widehat{RG}_\chi \to \mathbb{R}_\infty = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, indem wir für nicht-triviales $\alpha \in \widehat{RG}_\chi$ festlegen: $v_\chi(\alpha) := \min\{\chi(g) | g \in \operatorname{supp}(\alpha)\}$. Für $\alpha = 0 \in \widehat{RG}_\chi$ legen wir $v_\chi(\alpha) := \infty$ fest.

**2.2.3 Definition** (Initialterm)

Für $\alpha = \sum_{g \in G} r_g g \in \widehat{RG}_\chi$ definieren wir:

$$\operatorname{minT}_\chi(\alpha) := \sum_{\chi(g) = v_\chi(\alpha)} r_g g = \sum_{\chi(g) \text{ minimal}} r_g g.$$

Es gilt

$$\operatorname{minT}(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0.$$

Die Abbildung $\operatorname{minT}_\chi : \widehat{RG}_\chi \to RG$ ist multiplikativ, falls $RG$ nullteilerfrei ist. Andernfalls gilt zumindest:

**2.2.4 Lemma** *Seien $\alpha, \beta \in \widehat{RG}_\chi$. Es ist $\operatorname{minT}_\chi(\alpha) \cdot \operatorname{minT}_\chi(\beta) = \operatorname{minT}_\chi(\alpha \cdot \beta)$ oder $\operatorname{minT}_\chi(\alpha) \cdot \operatorname{minT}_\chi(\beta) = 0$.*

Die grundlegenden Strukturen der Novikov-Vervollständigung fassen wir in folgendem Lemma zusammen:

**2.2.5 Lemma** *Sei $G$ eine Gruppe, $R$ ein Ring mit Eins, $\chi : G \to \mathbb{R}$ ein Charakter, $g \in G$ ein Gruppenelement und $\alpha, \beta \in \widehat{RG}_\chi$ Elemente der Novikov-Vervollständigung, dann gilt:*

1. *Zu jeder reellen Zahl $r$ gibt es $\alpha_r \in RG$ und $\alpha_r^\infty \in \widehat{RG}_\chi$, mit $\alpha_r + \alpha_r^\infty = \alpha$ und $v_\chi(\alpha_r^\infty) > r$.*
2. *$v_\chi(\alpha \cdot \beta) \geq v_\chi(\alpha) + v_\chi(\beta)$.*
3. *$v_\chi(\alpha + \beta) > \min\{v_\chi(\alpha), v_\chi(\beta)\}$.*
4. *$v_\chi(g \cdot \beta) = \chi(g) + v_\chi(\beta)$.*
5. *$v_\chi(\alpha) = v_\chi(-\alpha)$.*

Der Beweis ist leicht aber aufwendig und wird daher dem Leser überlassen.

Eine Struktur auf einem $G$-Modul mit den Eigenschaften 3–5 werden wir später Bewertung nennen.

Wir wenden uns nun Fragen der Invertierbarkeit von Elementen in Novikov-Ringen zu. In der Novikov-Vervollständigung sind Elemente des Gruppenringes invertierbar, die im Gruppenring selbst nicht invertierbar sind.

**2.2.6 Satz** *(Invertierbarkeit) Sei $\alpha \in \widehat{RG}_\chi$ ein Element des Novikov-Rings.*

1. *Falls $\mathrm{minT}_\chi(\alpha)$ im Gruppenring rechts-invertierbar (links-invertierbar), dann ist $\alpha$ rechts-invertierbar (links-invertierbar).*
2. *Ist andererseits $\alpha$ rechts-invertierbar (links-invertierbar), dann ist auch $\mathrm{minT}_\chi(\alpha)$ rechts-invertierbar (links-invertierbar) oder ein Nullteiler des Gruppenringes.*

*Beweis.* Wir zeigen die Aussage nur für rechts-invertierbar.

Zu 1: Ist $\mathrm{minT}_\chi(\alpha)$ rechts-invertierbar, also etwa $\mathrm{minT}_\chi(\alpha) \cdot \beta = 1$, dann ist $\mathrm{minT}_\chi(\alpha \cdot \beta) = 1$ und es ist $\alpha \cdot \beta = 1 - \alpha'$ mit $\chi(\alpha') > 0$. Nun gilt $\alpha \cdot \beta \cdot (1 + \alpha' + \alpha'^2 + \ldots) = 1$.

Zu 2: Falls $\alpha \cdot \beta = 1$, so ist $\mathrm{minT}_\chi(\alpha) \cdot \mathrm{minT}_\chi(\beta) = 1$ oder $\mathrm{minT}_\chi(\alpha) \cdot \mathrm{minT}_\chi(\beta) = 0$ nach Lemma 2.2.4. □

Die Elemente der Form $rg$ mit $r \in R$ und $g \in G$ sind invertierbar, falls $r$ im Ring $R$ ein Inverses besitzt. Sie heißen triviale Einheiten. Für torsionsfreie Gruppen ist bekannt, dass Gruppenringe die Nullteiler besitzen auch nicht-triviale Einheiten besitzen (siehe [Pa]).

Für die additive Gruppe der reellen Zahlen $(\mathbb{R}, +)$ ist die Identität id ein Charakter. Ist $K$ ein Körper, so ist $\widehat{K\mathbb{R}}_{\mathrm{id}}$ ebenfalls ein Körper. Der folgende Satz beschreibt den Zusammenhang etwas genauer:

**2.2.7 Satz** *Sei $K$ ein Körper und $\chi : G \to \mathbb{R}$ ein Charakter einer torsionsfreien Gruppe.*

1. *Ist $\chi$ injektiv, so ist $\widehat{KG}_\chi$ ein Körper.*
2. *Ist $\chi$ nicht injektiv und $\widehat{KG}_\chi$ ein Schiefkörper, so enthält $KG$ nicht triviale Einheiten.*

*Beweis.* Zu 1: Ist $\chi$ injektiv, so ist $\widehat{KG}_\chi$ ein Unterkörper von $\widehat{K\mathbb{R}}_{\mathrm{id}}$.

Zu 2: Ist $\chi$ nicht injektiv, so gibt es zwei verschiedene Elemente $\alpha, \alpha' \in G$ mit $\chi(\alpha) = \chi(\alpha') = 0$. Da $\widehat{KG}_\chi$ ein Schiefkörper ist, ist $\alpha + \alpha'$ invertierbar. Sei also $(\alpha+\alpha') \cdot \beta = 1$, dann ist $(\alpha+\alpha') \cdot \mathrm{minT}(\beta) = 1$ in $KG$ oder $KG$ enthält Nullteiler, aber die Existenz von Nullteilern führt ebenfalls zu nicht-trivialen Einheiten. $\square$

Es ist durchaus möglich, dass die Voraussetzung von 2 nie erfüllt ist.

Ist $\chi$ nicht-trivial, injektiv und diskret, so ist $G = \mathbb{Z}$, und es handelt sich bei $\widehat{KG}_\chi$ um einen Unterring der Laurentpolynomreihen.

### 2.2.1 Gruppenhomomorphismen und Novikov-Ringe

Wir wollen nun noch sehen, dass Zusammenhänge verschiedener Gruppen zu Zusammenhängen zwischen Novikov-Vervollständigungen führen. Zuerst benötigen wir den Begriff der Verträglichkeit von Charakteren mit Homomorphismen.

**2.2.8 Definition** Seien $G$ und $G'$ Gruppen mit Charakteren $\chi$ und $\chi'$, und $\varphi : G \to G'$ ein Homomorphismus. Der Homomorphismus heißt *verträglich* mit den Charakteren, wenn $\forall g \in G,\ \chi'(\varphi(g)) = \chi(g)$ gilt, also $\chi = \chi' \circ \varphi$ ist.

Zu zwei Charakteren $\chi : G \to \mathbb{R}$ und $\chi' : G' \to \mathbb{R}$ induziert jeder verträgliche Homomorphismus $\varphi : G \to G'$ einen Homomorphismus der Novikov-Ringe $\widehat{\varphi}_\chi : \widehat{RG}_\chi \to \widehat{RG'}_{\chi'}$.

Ist $\varphi$ injektiv, so ist $\widehat{\varphi}_\chi$ auch injektiv. Gleiches gilt für die Surjektivität.

Hieraus gewinnt man sofort folgenden Spezialfall: Ist $U \leq G$ eine Untergruppe von $G$, so ist die Einschränkung $\chi_{|U}$ ein Charakter von $U$ und der Novikov-Ring $\widehat{RU}_{\chi_{|U}}$ ist ein Unterring des Novikov-Rings $\widehat{RG}_\chi$.

Betrachtet man exakte Folgen von Gruppen, so erhält man das folgende Ergebnis : Ist $0 \to N \to G \xrightarrow{\pi} G/N \to 0$ exakt, und der Charakter $\chi$ faktorisiert durch $\pi$ ($\chi(N) = 0$), dann erhält man einen verträglichen Charakter $\chi'$ von $G/N$ durch Setzten von $\chi'(gN) = \chi(g)$. Das Resultat ist eine exakte Sequenz: $0 \to \widehat{RN}_{\chi_{|N}} \to \widehat{RG}_\chi \to \widehat{R[G/N]}_{\chi'} \to 0$. Da $\chi(N) = 0$ ist hier $\widehat{RN}_{\chi_{|N}} = RN$.

Es ist möglich, eine passende Kategorie zu finden (die Objekte sind Paare aus Gruppen und Charakteren und die Homomorphismen sind ausschließlich mit den Charakteren verträgliche Gruppenhomomorphismen), so dass man das Novikov-Vervollständigen als exakten Funktor wiederfindet. Weiter hat man noch die Möglichkeit, in der Kategorie verschiedene Ringe und Homomorphismen zwischen diesen zuzulassen. Dies soll hier aber nicht ausgeführt werden.

### 2.2.2 Die Spur-Abbildung

Die Spur-Abbildung des Gruppenringes ist eine Abbildung des Gruppenringes $RG$ in den Ring $R$. Sie lässt sich auf den Novikov-Ring verallgemeinern.

**2.2.9 Definition** Die *Spur* eines Elementes in $\widehat{RG}_\chi$ ist der Ringkoeffizient des neutralen Elementes. Dies führt zu einer Abbildung $\mathrm{tr} : \widehat{RG}_\chi \to R$ mit

$$\mathrm{tr}\left(\sum_{g\in G} r_g \cdot g | r_g \in R\right) := r_e.$$

Man überzeugt sich davon, dass die Spur-Abbildung eine $R$-lineare Abbildung ist, für die zusätzlich gilt:

$$\forall \alpha, \beta \in \widehat{RG}_\chi,\ \mathrm{tr}(\alpha \cdot \beta) = \mathrm{tr}(\beta \cdot \alpha).$$

### 2.2.3 Nullteiler

Wir wollen nun kurz das Nullteilerproblem des Gruppenringes ansprechen. Ist $g \in G$ ein Torsionselement der Ordnung $n$, dann gilt in $R[G]$ :

$$(1 - g) \cdot (1 + g + g^2 + \ldots + g^{n-1}) = 0.$$

Das heißt, der Gruppenring enthält Nullteiler. Offensichtlich ist dies auch der Fall, wenn $R$ schon Nullteiler enthält. Es ist offen, ob der Gruppenring $K[G]$ für einen Körper $K$ und eine torsionsfreie Gruppe $G$ nullteilerfrei ist.

Bemerkung: Die Struktur $K[[G]]$ kann sehr wohl Nullteiler besitzen: In $\mathbb{Q}[[\mathbb{Z}]]$ gilt zum Beispiel: $\big(\ldots + t^n + t^{n+1} + \ldots\big) \cdot (1 - t) = 0.$

### 2.2.4 Idempotente

Auch bei idempotenten Elementen kann man das Wissen über Gruppenringe teilweise auf Novikov-Vervollständigungen übertragen.

**2.2.10 Lemma** *Sei $R$ ein Ring und $G$ eine Gruppe mit einem Charakter $\chi$. Ist $e \in \widehat{RG}_\chi$ ein idempotentes Element, dann ist* $\mathrm{minT}(e)$ *ein idempotentes Element oder ein Nullteiler in $RG$. Ist* $\mathrm{minT}(e) = 1$*, so ist schon $e = 1$.*

*Beweis.* Die erste Aussage folgt wieder sofort aus Lemma 2.2.4. Ist $\mathrm{minT}(e)$ kein Nullteiler, so ist $\mathrm{minT}(e) = \mathrm{minT}(e \cdot e) = \mathrm{minT}(e) \cdot \mathrm{minT}(e)$

Ist $\mathrm{minT}(e) = 1$. Dann kann man $e$ darstellen als $e = 1 + e_\infty$ mit $\chi(e_\infty) > \chi(e) = 0$ und es gilt: $1 + e_\infty = (1 + e_\infty)^2 = 1 + 2e_\infty + e_\infty^2$. Also $-e_\infty = e_\infty^2$. Wäre $e_\infty \neq 0$, dann wäre aber $\chi(e_\infty) < \chi(e_\infty^2)$. Also folgt $e_\infty = 0$. □

Ganzzahlige Gruppenringe $\mathbb{Z}G$ besitzen keine nicht-trivialen idempotenten Elemente ([Pa]). Das heißt, die Elemente 1 und 0 sind die einzigen idempotenten Elemente in $\mathbb{Z}G$. Nullteilerfreie ganzzahlige Novikov-Vervollständigungen besitzen demnach ebenfalls keine nicht-trivialen idempotenten Elemente.

### 2.2.5 Direkte Produkte

Wir wollen uns nun direkten Produkten zuwenden. Die Struktur, die ein Gruppenring eines Produktes hat, ist bekannt. Wir zitieren hier nur den Satz, der von uns für Interesse ist:

**2.2.11 Satz** *(Direkte Produkte von Gruppenringen)*

*Seien $G$ und $H$ Gruppen und $K$ ein Körper, dann ist*

$$K[G \times H] \cong K[G] \otimes_K K[H].$$

Die Situation ist bei Novikov-Vervollständigungen nicht so einfach. Das Tensorprodukt von zwei Novikov-Vervollständigungen ist selbst keine Novikov-Vervollständigung. Es ist aber möglich, das Tensorprodukt in die Novikov-Vervollständigung des Produktes einzubetten.

**2.2.12 Satz** *(Direkte Produkte von Novikov-Vervollständigungen)*

*Sei $\chi$ ein Charakter des direkten Produktes $G \times H$. Weiter seien $\chi|_G = \chi_G$ und $\chi|_H = \chi_H$ die Einschränkungen des Charakters auf die Faktoren. Dann gibt es eine natürliche injektive Abbildung*

$$\varphi : \widehat{\mathbb{Z}G}_{\chi_G} \otimes \widehat{\mathbb{Z}H}_{\chi_H} \to \widehat{\mathbb{Z}[G \times H]}_{\chi}.$$

*Beweis.* Die Abbildung $\varphi$ entspricht dem formalen Ausmultiplizieren. Ist $\sum_{g \in G} n_g g \otimes \sum_{h \in H} m_h h$ ein Elementartensor, so bilden wir diesen ab auf

$$\varphi(\sum_{g \in G} n_g g \otimes \sum_{h \in H} m_h h) = \sum_{g \in G} n_g g \cdot \sum_{h \in H} m_h h = \sum_{g \in G} \sum_{h \in H} n_g m_h gh.$$

Wir setzen dies auf das ganze Tensorprodukt distributiv fort.

Wir überzeugen uns, dass diese Abbildung die gewünschten Voraussetzungen erfüllt:

- *Wohldefiniertheit*: Man sieht leicht, dass sich das Ausmultiplizieren auf Grund seiner Distributivität mit dem Tensorprodukt verträgt.
- *Homomorphismus*: Ebenfalls auf Grund der Distributivität ist die Abbildung ein Homomorphismus.
- *Injektivität*:

  Wir wollen aus

  $$\varphi\big(\sum_{l=1}^{k} \alpha_l\big) = \varphi\big(\sum_{l=1}^{k} (\sum_{g \in G} n_{(l,g)} g \otimes \sum_{h \in H} m_{(l,h)} h)\big) = 0$$

  folgern, dass $\sum_{l=1}^{k} \alpha_l = 0$ gilt.

  Wir nähern uns der Aussage in Schritten:

  1. (FALL $k = 1$)
     Ist $k = 1$ so handelt es sich um einen Elementartensor und dieser wird nur dann auf 0 abgebildet, wenn er selbst schon trivial war.

2. (kollinearer FALL)

   Nun betrachten wir den Fall, dass die Vektoren

   $$\{\big(n_{(1,g)}, n_{(2,g)}, \ldots, n_{(k,g)}\big)\,|g \in G\}$$

   kollinear über $\mathbb{Z}$ sind.

   Angenommen es gibt ein $\overrightarrow{v} = (v_1, \ldots v_k) \in \mathbb{Z}^k$, so dass es zu jedem $g \in G$ eine Zahl $a_g \in \mathbb{Z}$ gibt, so dass $(n_{(1,g)}, n_{(2,g)}, \ldots n_{(k,g)}) = a_g \cdot \overrightarrow{v}$ gilt, dann ist $\sum_{l=1}^{k} \alpha_l = 0$.

   Tatsächlich gilt dann:

   $$\sum_{l=1}^{k} \alpha_l = \sum_{l=1}^{k} (\sum_{g \in G} a_g v_l \cdot g \otimes \sum_{h \in H} m_{(l,h)} h) = \sum_{g \in G} a_g \cdot g \otimes \sum_{l=1}^{k} v_l \cdot \sum_{h \in H} m_{(l,h)} h$$

   Da dies ein Elementartensor ist, folgt die Aussage nun aus FALL 1.

3. (allgemeiner FALL)

   Wir beobachten zuerst, dass die Vektoren

   $$\Big\{\,(n_{(1,g)}, n_{(2,g)}, \ldots, n_{(k,g)})\Big|\, g \in G\Big\}$$

   und die Vektoren

   $$\Big\{\,(m_{(1,h)}, m_{(2,h)}, \ldots, m_{(k,h)})\Big|\, h \in H\Big\}$$

   orthogonal liegen. Die Mengen spannen also zwei Orthogonale Unterräume $U_g$ und $U_h$ des $\mathbb{R}^k$ auf. Es gibt nun ein Erzeugendensystem $\{e_1, \ldots, e_j \in \mathbb{Z}^k\}$ von $U_g$, so dass alle Vektoren der ersten Menge als *ganzzahlige* Linearkombinationen der Vektoren $e_i$ geschrieben werden können.

   Sei also $(n_{(1,g)}, n_{(2,g)}, \ldots, n_{(k,g)}) = \sum_{i=1}^{j} a_{i,g} \cdot e_i$, dann erhalten wir:

   $$\sum_{l=1}^{k} \alpha_l = \sum_{i=1}^{j} \sum_{l=1}^{k} (a_{i,g} e_{il} \cdot g \otimes \sum_{h \in H} m_{(l,h)} h)$$

   Für festes $i$ wird die Summe $\sum_{l=1}^{k} a_{i,g} e_{il} \cdot g \otimes \sum_{h \in H} m_{(l,h)} h$ unter $\varphi$ noch immer auf 0 abgebildet. Nach FALL 2 sind diese Summen aber trivial.

- (*Natürlichkeit*) Die Natürlichkeit der Abbildung ist zu verstehen als eine Verträglichkeit mit Gruppenhomomorphismen. Streng genommen müsste man die Novikov-Vervollständigung als einen Funktor von der Kategorie aus Paaren von Gruppen und Charakteren in die Novikov-Ringe sehen. Man sieht dann, dass die Produktabbildung sich in beiden Eingängen mit Homomorphismen verträgt. □

Die Abbildung ist nicht surjektiv, wenn beide Charaktere $\chi_G$ und $\chi_H$ nicht trivial sind. Wählt man zum Beispiel $g \in G$ mit $\chi(G) > 0$ und $h \in H$ mit $\chi(h) > 0$ dann ist $\sum_{n \in \mathbb{N}} g^n h^n$ nicht im Bild von $\varphi$. Zusätzlich gibt es im Bild Ketten, deren Projektion auf die Faktoren nicht in der Novikov-Vervollständigung liegen. Ist zum Beispiel $\chi(h) > \chi(g) > 0$, dann ist die Projektion des Element $g^{-1}h + g^{-2}h^2 + g^{-3}h^3 + \ldots$ auf $G$ nicht in $\widehat{\mathbb{Z}G}_{\chi_G}$.

### 2.2.6 Von-Neumann-Endlichkeit

Für Körper der Charakteristik 0 ist die von-Neumann-Endlichkeit des Gruppenringes seit einiger Zeit bekannt. Siehe z.B. [Pa].

**2.2.13 Definition** Ein Ring $R$ heißt *von-Neumann-endlich* (auch Dedekind-endlich), wenn für alle $\alpha, \beta \in R$ mit $\alpha \cdot \beta = 1$ auch $\beta \cdot \alpha = 1$ gilt.

Die von-Neumann-Endlichkeit ist äquivalent zur Eigenschaft, dass jeder surjektive $R$-Modul-Endomorphismus von $R$ injektiv ist.

Die ganzzahlige Novikov-Vervollständigung ist von-Neumann-endlich. Zuerst wurde dies für diskrete Charaktere in [Ko], und dann für alle Charaktere in [Bi 2] gezeigt. Da Matrizenringe über Novikov-Ringen selbst Novikov-Vervollständigungen von Matrizenringen sind $(M_n(\widehat{RG}_\chi) = \widehat{RM_n(G)}_\chi)$, reicht dies um die von-Neumann-Endlichkeit der Matrizenringe zu zeigen.

**2.2.14 Definition** Ein Ring heißt *reduziert*, wenn er keine nilpotententen Elemente außer der 0 besitzt.

Auch bei der von-Neumann-Endlichkeit liegt die Schwierigkeit des Beweises in den möglichen Nullteilern des Gruppenringes, denn alle reduzierten Ringe sind von-Neummann-endlich.

### 2.2.7 Ranginvarianz der Novikov-Vervollständigung

Der Novikov-Ring über einem Integritätsbereich lässt eine nicht-triviale Abbildung in einen Körper zu. (Dieses Resultat ist schon in [BiSt] zu finden und stammt ursprünglich aus [Sik].) Folglich besitzt er die Ranginvarianzeigenschaft (Siehe Definition 1.1.1).

Sei $R$ ein Integritätsbereich, $G$ eine Gruppe und $\chi$ ein nicht-trivialer Charakter. Dann gilt für alle Gruppenelemente $g$, dass $\mathrm{id}(\chi(g)) = \chi(g)$. Der Homomorphismus $\chi$ verträgt sich also mit den Charakteren $\chi$ und id. Es gibt demnach, wie in Abschnitt 2.2.1 beschrieben, einen nicht-trivialen Ringhomomorphismus $\widehat{RG}_\chi \to \widehat{R\mathbb{R}}_{\mathrm{id}}$.

Die Einbettung von $R$ in dessen Quotientenkörper $Q := R^{-1}R$ induziert eine Inklusion $\widehat{R\mathbb{R}}_{\mathrm{id}} \to \widehat{Q\mathbb{R}}_{\mathrm{id}}$. Diese Novikov-Vervollständigung ist aber nach Satz 2.2.7 ein Körper.

Man sieht, dass die Novikov-Vervollständigung auch auf den Integritätsbereich $\widehat{R[\chi(G)]}_{\mathrm{id}}$, er ist gerade das Bild von $\widehat{RG}_\chi$, nicht-trivial abgebildet werden kann.

### 2.2.8 Topologie

Die Novikov-Vervollständigung trägt in natürlicher Weise eine Topologie. In diesem Abschnitt wollen wir diese Topologie beschreiben und einige ihrer Eigenschaften aufzeigen.

**2.2.15 Definition** (Topologie der Novikov-Vervollständigung)

Sei $\widehat{RG}_\chi$ eine Novikov-Vervollständigung. Wir definieren zuerst Umgebungen von $0 \in \widehat{RG}_\chi$ als:

$$U_r := \left\{ \alpha \in \widehat{RG}_\chi \middle| \chi(\alpha) > r \right\}.$$

Wir definieren nun eine Topologie $\mathcal{T}_\chi$ auf $\widehat{RG}_\chi$, indem wir setzen: Zu jedem $\alpha \in \widehat{RG}_\chi$ ist $\mathcal{B}(\alpha) = \{U_r + \alpha | r \in \mathbb{R}\}$ eine offene Umgebungsbasis von $\alpha$.

Die Menge $U_r + \alpha$ ist die Menge aller Elemente in $\widehat{RG}_\chi$, die mindestens bis zur Höhe $r$ mit $\alpha$ übereinstimmen. Ist $R$ ein Körper, so wird $\widehat{RG}_\chi$ auf diese Weise zu einem topologischen $R$-Vektorraum, da die Addition und die Skalarmultiplikation stetig sind. (Ist $R$ kein Körper, so sollte man wohl von einem topologischen $R$-Modul sprechen.)

Eine Folge $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\widehat{RG}_\chi$ konvergiert gegen ein Element $\alpha$, wenn die Folge $(\alpha_n-\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Folge $\chi(\alpha_n-\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\infty$ konvergiert. Das bedeutet, dass die Anfangsstücke der $\alpha_n$ für große $n$ mit dem Anfangsstück von $\alpha$ übereinstimmen.

Es ist nun nicht mehr überraschend, dass es sich hierbei um einen metrisierbaren Raum handelt.

**2.2.16 Lemma** *Definieren wir die Funktion $d_\chi : \widehat{RG}_\chi \times \widehat{RG}_\chi \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, indem wir für $\alpha, \beta \in \widehat{RG}_\chi$ setzen: $d_\chi(\alpha,\beta) = e^{-\chi(\alpha-\beta)}$, dabei ist $e^{-\infty} = 0$, dann ist $d_\chi$ eine Metrik, die die Topologie $\mathcal{T}_\chi$ induziert.*

*Beweis.* Die Symmetrie und die Dreiecksungleichung der Metrik folgen direkt aus Lemma 2.2.5. □

Ebenfalls folgt aus Lemma 2.2.5, dass $RG$ dicht in $\widehat{RG}_\chi$ liegt. $\widehat{RG}_\chi$ ist ein vollständiger Raum. Wie in jedem metrischen Raum sind in $(\widehat{RG}_\chi, \mathcal{T}_\chi)$ folgenstetige Funktionen stetig.

# Kapitel 3

# Bewertungen

Wir wenden uns nun Bewertungen zu. Bewertungen ersetzen die im hier nicht besprochenen homotopischen Fall verwendeten $G$-invarianten Höhenfunktionen auf Zellkomplexen. Analog zu vielen Bereichen der algebraischen Topologie kann man aus einem gegebenen geometrischen Komplex einen algebraischen erhalten, jedoch nicht umgekehrt.

Wir werden erst Bewertungen von Moduln behandeln und dann dieses Konzept auf Kettenkomplexe erweitern. Danach werden wir den Komplex $\widehat{\mathbf{F}}_v$, bestehend aus den höchstens in positiver Richtung unendlichen Ketten, betrachten und die Konstruktion der Novikov-Vervollständigung wiederfinden.

## 3.1 Moduln

Wir wollen nun erklären, was wir unter einer Bewertung eines Moduls verstehen. Bewertungen erweitern den Charakterbegriff auf Moduln. Eine Bewertung zu einem Charakter ist eine Abbildung, die jedem Element des Moduls eine Höhe zuordnet, so dass diese Zuordnung sich mit der Gruppenoperation und dem Charakter verträgt und eine Summe nicht niedriger bewertet wird als ihre Summanden.

**3.1.1 Definition** Sei $A$ ein $G$-Modul und $\chi : G \to \mathbb{R}$ ein Charakter. Eine Abbildung $v : A \to \mathbb{R}_\infty$ heißt *Bewertung* von $A$, die $\chi$ erweitert, wenn gilt:

$$\begin{array}{llcl}
\forall a, b \in A, & v(a+b) & \geq & \min\{v(a), v(b)\} \\
\forall g \in G, a \in A, & v(ga) & = & \chi(g) + v(a) \\
\forall a \in A, & v(-a) & = & v(a) \\
 & v(0) & = & \infty.
\end{array}$$

Die Menge $Z$ der Modulelemente, die mit $\infty$ bewertet werden ($Z = v^{-1}(\infty)$), heißt Zentrum der Bewertung. Eine Bewertung heißt zentrumsfrei, falls $Z = \{0\}$ gilt.

Wir werden nun erklären, was wir unter einer naiven Bewertung verstehen, da wir uns später nur noch für naive zentrumsfreie Bewertungen von freien Moduln interessieren werden. Hierfür benötigen wir zuerst das Konzept des Trägers für Modulelemente.

**3.1.2 Definition** Sei $F$ ein freier $G$-Modul mit Basis $\mathcal{X} = \{x_i | i \in I\}$, dann hat jedes Element $f \in F$ eine eindeutige Darstellung der Form $f = g_1 x_1 + \ldots + g_n x_n$ mit $g_i \in \mathbb{Z}G$ und $x_i \in \mathcal{X}$. Wir definieren den *Träger* von $g$ durch:

$$\mathrm{supp}_{\mathcal{X}}(g) := \{x_i | g_i \neq 0\}.$$

Die Definition ist offensichtlich abhängig von der Wahl der Basis.

**3.1.3 Definition** (naive Bewertung)

Sei $F$ ein freier $G$-Modul. Ist $\mathcal{X}$ eine $G$-Basis von $F$, dann ist $G\mathcal{X}$ eine $\mathbb{Z}$-Basis von $F$.

Eine Bewertung von $F$ heißt *naiv* bezüglich einer Basis $\mathcal{X}$, wenn sie gegeben ist durch:

$$\forall c \in F, \quad v(c) = \inf v(\mathrm{supp}_{G\mathcal{X}}(c)).$$

Bemerkung: Jede Funktion $\mathcal{X} \to \mathbb{R}$ lässt sich durch diese Gleichung leicht zu einer naiven Bewertung $F \to \mathbb{R}$ fortsetzen.

Wir betrachten nun die Kategorie $\mathcal{D}$ von Gruppen-Moduln:

Ein Objekt von $\mathcal{D}$ sei ein Paar $(G, A)$, so dass $G$ eine Gruppe und $A$ ein $G$-Modul ist. Ein Morphismus $\Phi : (G, A) \to (G', A')$ ist ein Paar von Abbildungen $(\varphi, f)$, so dass $\varphi : G \to G'$ ein Gruppenhomomorphismus und $f : A \to A'$ ein Modulhomomorphismus ist und zusätzlich gilt:

$$\forall g \in G, a \in A \quad f(g \cdot a) = \varphi(g) \cdot f(a).$$

Die Morphismen sind solche Abbildungen zwischen Moduln, die sich mit den zugehörigen Gruppenoperationen vertragen. Man überzeugt sich leicht davon, dass es sich hierbei um eine Kategorie handelt.

Ist $\chi' : G' \to \mathbb{R}_\infty$ ein Charakter, so erhält man einen Charakter von $G$ durch die Hintereinanderausführung $\chi' \circ \varphi$. Er ist gerade der Charakter von $G$, für den der Homomorphismus verträglich (im Sinne von Definition 2.2.8) mit den beiden Charakteren ist. Wir wollen diesen zurückgeholten Charakter ebenfalls mit $\chi' \circ \Phi$ bezeichnen.

Ist nun $v' : A \to \mathbb{R}$ eine Bewertung des $G'$-Moduls $A'$, die $\chi'$ erweitert, so erhält man eine Bewertung $v$ des $G$ Moduls $A$, die $\chi' \circ \Phi$ erweitert, indem man setzt: $v(a) = v'(f(a))$. Wir wollen wiederum $v$ mit $v' \circ \Phi$ bezeichnen.

**3.1.4 Lemma** *Sei $\Phi : (G, F) \to (G', F')$ ein Morphismus in $\mathcal{D}$. Seien $F$, $F'$ freie $G$ bzw. $G'$ Moduln, $v'$ und $v$ zugehörige naive Bewertungen zu einem Charakter $\chi$ bzgl. Basen $\mathcal{X}$ und $\mathcal{X}'$. Dann gilt:*

$$\forall f \in F \quad (v' \circ \Phi)(f) \geq v(f) + \inf_{x \in \mathcal{X}} \{(v' \circ \Phi)(x) - v(x)\}.$$

*Beweis.* Sei $f \in F$. Dann gibt es eine Darstellung von $f$ von der Form $a = m_1 g_1 x_1 + m_2 g_2 x_2 + \ldots + m_n g_n x_n$. Es folgt:

$$\begin{aligned}
& (v' \circ \Phi)(f) \\
= \; & (v' \circ \Phi)(m_1 g_1 x_1 + \ldots + m_n g_n x_n) \\
\geq \; & \min\{(v' \circ \Phi)(m_1 g_1 x_1), \ldots, (v' \circ \Phi)(m_n g_n x_n)\} \\
= \; & \min\{\chi(\varphi(g_1)) + (v' \circ \Phi)(m_1 x_1), \ldots, \chi(\varphi(g_n)) + (v' \circ \Phi)(m_n x_n)\} \\
= \; & \min\{\chi(\varphi(g_1)) + v(m_1 x_1) + (v' \circ \Phi)(m_1 x_1) - v(m_1 x_1), \ldots, \\
& \chi(\varphi(g_n)) + v(m_n x_n) + (v' \circ \Phi)(m_n x_n) - v(m_n x_n)\} \\
\geq \; & \min\{\chi(\varphi(g_1)) + v(m_1 x_1), \ldots, \chi(\varphi(g_n)) + \\
& \quad v(m_n x_n)\} + \min_{x \in X}\{(v' \circ \Phi)(x) - v(x)\} \\
\geq \; & \min\{v(m_1 g_1 x_1), \ldots, v(m_n g_n x_n)\} + \min_{x \in X}\{(v' \circ \Phi)(x) - v(x)\} \\
\geq \; & v(m_1 g_1 x_1 + \ldots + m_n g_n x_n) + \min_{x \in X}\{(v' \circ \Phi)(x) - v(x)\} \\
= \; & v(f) + \min_{x \in X}\{(v' \circ \Phi)(x) - v(x)
\end{aligned}$$

□

Sind $v$ und $v'$ Bewertungen eines Moduls $A$, so sagen wir $v'$ dominiert $v$, wenn es eine reelle Zahl $r \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\forall a \in A,\ v'(a) - v(a) \geq r$. Wenn $v$ und $v'$ sich gegenseitig dominieren, so heißen sie äquivalent. Da der Begriff des Dominierens transitiv ist, sind die Äquivalenzklassen partiell geordnet.

**3.1.5 Korollar** *Zwei naive zentrumslose Bewertungen eines endlich erzeugten freien Moduls sind äquivalent.*

## 3.2 Kettenkomplexe

Das Konzept von Bewertungen von Moduln lässt sich folgendermaßen sinnvoll zu Bewertungen von Kettenkomplexen erweitern. Sei

$$\mathbf{C} = \bigoplus_{i=-\infty}^{\infty} C_i = \ldots \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \ldots$$

ein Kettenkomplex aus $G$-Moduln.

**3.2.1 Definition** Eine Bewertung des Kettenkomplexes $\mathbf{C}$ ist eine Bewertung des Komplexes aufgefasst als $G$-Modul mit diagonaler $G$-Operation und der zusätzlichen Eigenschaft, dass

$$\forall c \in C, \quad v(c) \leq v \circ \partial(c).$$

Die Bewertung einer Kette wird also durch die Randabbildung nicht erniedrigt.

Aus einer Bewertung eines Kettenkomplexes erhalten wir in natürlicher Weise eine Filtrierung von $\mathbf{C}$, indem wir die Unterkomplexe

$$\mathbf{C}_v^{[-r,\infty)} := \{c \in C | v(c) \geq -r\}$$

betrachten. Dies sind tatsächlich Unterkomplexe, da das Summieren von Ketten die Bewertung einer Kette nicht erniedrigen kann.

**3.2.2 Lemma** *Sei $\mathbf{C}$ ein freier $G$-Komplex, der mit einer Bewertung $v$ zu einem nicht-trivialen Charakter $\chi$ versehen ist. Betrachtet man die oben genannte Filtrierung $\{\mathbf{C}_v^{[-r,\infty)}\}$, so gilt: Existiert ein $D \in \mathbb{R}$, so dass die induzierten Abbildungen $H_i(C_0) \to H_i(C_D)$ für alle $i \leq m$ trivial sind, dann ist $\{\mathbf{C}_v^{[-r,\infty)}\}$ schon im Wesentlichen $m$-azyklisch.*

*Beweis.* Sei $g \in G$ mit $\chi(g) > 0$, dann wähle man $D' := D + \chi(g)$. Für $r \in \mathbb{R}$ gibt es eine ganze Zahl $k \in \mathbb{Z}$ mit $r \leq \chi(g) \cdot k \leq r + \chi(g) \cdot k$. Da die induzierten Abbildungen $H_i(C_0) \to H_i(C_D)$ trivial sind, sind die induzierten Abbildungen $H_i(g^k C_0) \to H_i(g^k \cdot C_D)$ trivial. Nun ist aber $C_r \subseteq C_{\chi(g)\cdot k} = g^k C_0$ und $g^k C_D = C_{\chi(g)\cdot k + D} \subseteq C_{r+D'}$. Hieraus folgt die Aussage. □

Die im Lemma genannte Zahl $D$, um die man absteigen muss, um einen Zyklus auch als Rand zu erkennen, wird als Lag bezeichnet.

## 3.3 Der vervollständigte Kettenkomplex $\widehat{\mathbf{C}}_\chi$

Wir wollen zu einem bewerteten Kettenkomplex nun noch eine Vervollständigung, den Kettenkomplex der nur in positiver Richtung unendlichen Ketten, betrachten.

Sei $F$ ein freier $G$-Modul und $v$ eine naive Bewertung zur Basis $\mathcal{X}$ von $F$. Wir betrachten die Menge aller formalen Summen $\sum_{x\in\mathcal{X}} \sum_{g\in G} n_{(g,x)} gx$. Sie bilden einen $G$-Modul. Analog zum Konzept der Novikov-Vervollständigung interessieren wir uns aber nur für solche Ketten, die unter jeder Höhe nur endlich viele Elemente im Träger besitzen.

Es sei für $c = \sum_{x\in\mathcal{X}} \sum_{g\in G} n_{(g,x)} gx$ wieder der Träger definiert durch

$$\operatorname{supp}_{G\mathcal{X}}(c) = \{g \cdot x | n_{(g,x)} \neq 0\} \subseteq G\mathcal{X}.$$

**3.3.1 Definition** (Vervollständigung)

Es sei $\widehat{F}_v$ die Menge aller formalen Summen $\sum_{x\in\mathcal{X}} \sum_{g\in G} n_{(g,x)} gx$, für die gilt: Zu jeder Zahl $r \in \mathbb{R}$ gibt es nur endlich viele $b \in \operatorname{supp}(c)$, so dass $v(b) \leq r$. Es ist leicht zu sehen, dass $\widehat{F}_v$ wieder einen $RG$-Modul bildet.

$\widehat{F}_v$ heißt die *Vervollständigung* von $F$ bezüglich $v$.

### 3.3.1 Abhängigkeit von der Basis $\mathcal{X}$ und der Bewertung $v$

Auf freien Moduln endlichen Ranges sind naive, zentrumslose Bewertungen äquivalent. Das bedeutet, dass $\widehat{F}_v$ unabhängig von der Wahl von $\mathcal{X}$ und $v$

ist. Wir schreiben also ab sofort $\widehat{F}$ oder $\widehat{F}_\chi$, wenn wir die Abhängigkeit vom Gruppencharakter verdeutlichen wollen.

Ist $F$ nicht von endlichem Rang, so ist es durchaus möglich, zwei Bewertungen $v$ und $v'$ zu finden, so dass $\widehat{F}_v \neq \widehat{F}_{v'}$. Sei zum Beispiel $G = \{0\}$ die triviale Gruppe. Dann sind $G$-Moduln gerade $\mathbb{Z}$-Moduln. Sei $F$ der freie $\mathbb{Z}$-Modul abzählbaren Ranges mit der Basis $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Die Bewertungen $v$ und $v'$ seien gegeben durch $v(x_i) = 0$ und $v'(x_i) = i$, dann ist die Kette $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots$ in $\widehat{F}_{v'}$ aber nicht in $\widehat{F}_v$.

Wir versuchen nun einen vervollständigten Modul zu finden, der unabhängig von der gewählten Basis und der Bewertung ist. Wir stellen fest, dass im genannten Beispiel die Menge $F_v \cap F_{v'}$ ebenfalls ein $G$-Modul ist.

Wir betrachten den Schnitt aller durch naive (zentrumslose) Bewertungen $v$ entstandenen Moduln $F_v$. Erstaunlicherweise besitzt dieser noch zwei weitere handliche Beschreibungen, wie wir in den beiden folgen Sätzen sehen werden:

**3.3.2 Satz** *Sei $F$ ein freier $G$-Modul und $\chi$ ein Charakter. Ist $V$ die Menge aller naiven Bewertungen, die $\chi$ erweitern, und $\mathcal{U}$ die Menge aller endlich erzeugten Untermoduln von $F$, so ist*

$$\bigcap_{v\in V} \widehat{F}_v = \bigcup_{E\in\mathcal{U}} \widehat{E}_\chi.$$

Auch diesen Komplex werden wir in Zukunft mit $\widehat{F}_\chi$ bezeichnen.

*Beweis.* ' $\supseteq$ ': Sei $E \in \mathcal{U}$ ein endlich erzeugter Untermodul von $F$, weiter sei $\mathcal{X}$ eine Basis von $F$. Dann gibt es eine endliche Teilmenge $\mathcal{X}' \subseteq \mathcal{X}$, so dass $E \subseteq E' = G\mathcal{X}'$. Ist $v$ eine bezüglich $\mathcal{X}$ naive Bewertung, dann ist $\widehat{E}_\chi \subseteq \widehat{E'}_\chi = \widehat{E'}_{v_{|E'}} \subseteq F_v$.

' $\subseteq$ ': Sei $\mathcal{X}$ eine Basis von $F$. Wir zeigen: Ist

$$\alpha = \sum_{x\in\mathcal{X}} \sum_{g\in G} n_{(g,x)} gx \in \bigcap_{v\in V} \widehat{F}_v,$$

dann ist die Summe über $\mathcal{X}$ endlich. Angenommen es wären

$$n_{(g_1,x_1)} \neq 0, n_{(g_2,x_2)} \neq 0, \ldots$$

unendlich viele von 0 verschiedene Koeffizienten mit paarweise verschiedenen $x_i$, dann gibt es eine naive Bewertung mit $v(g_i \cdot x_i) = 0$. Dann ist aber $\alpha \notin F_v$. $\square$

Ist $\mathcal{X}$ eine $G$-Basis von $F$, dann sind in $\widehat{F}_\chi$ genau die Elemente aus $\widehat{F}_v$, deren $G$-Träger nur endlich viele Elemente enthält. Die Definition des Novikov-Rings $\widehat{\mathbb{Z}[G]}_\chi$ (Definition 2.2.2) deckt sich mit dieser Definition der Vervollständigung.

### 3.3.2 Zusammenhang zur Novikov-Vervollständigung

Der Zusammenhang zwischen der Novikov-Vervollständigung und den auf diese Weise vervollständigten Moduln ist aber noch größer, denn es gilt:

**3.3.3 Satz** *Für den Modul $\widehat{F}_\chi$ gilt:*

$$\widehat{F}_\chi \cong \widehat{\mathbb{Z}G}_\chi \bigotimes_{\mathbb{Z}G} F.$$

*Beweis.* Wir zeigen: Der natürliche $\widehat{\mathbb{Z}G}$-Homomorphismus

$$\iota : \widehat{\mathbb{Z}G}_\chi \bigotimes_{\mathbb{Z}G} F \to \widehat{F}_\chi,$$

der auf den Elementartensoren durch

$$\sum_{g \in G} n_g g \otimes f \mapsto \sum n_g g f$$

gegeben ist, ist ein Isomorphismus.

- *Wohldefiniertheit*: Die Wohldefiniertheit ergibt sich aus der Verträglichkeit von Gruppenoperation und Addition in $\widehat{F}_\chi$ und ist leicht nachzurechnen.

- *Injektivität*: Die Injektivität von $\iota$ folgt aus der Tatsache, dass unendliche Ketten sich, nachdem man sie über einer Höhe abgeschnitten hat, wie endliche Ketten verhalten. Man sieht leicht, dass $v(\iota(\sum_{g \in G} n_g g \otimes f)) \geq v_\chi(\sum_{g \in G} n_g g) + v(\iota(f))$. Hieraus erhält man:

Ist $D \in \mathbb{R}$, dann kann man jedes Element $\lambda \in \widehat{\mathbb{Z}G}_\chi$ so in eine Summe $\lambda = \lambda_0 + \lambda_\infty$ zerlegen, dass $v(\lambda_\infty) > D + v(\lambda)$ und $\lambda_0 \in \mathbb{Z}G$. Da $F$ ein freier $G$-Modul ist, können wir eine Basis $\mathcal{X}$ von $F$ wählen. Um zu zeigen, dass $\iota$ injektiv ist, reicht es zu zeigen, dass aus $\iota(\lambda \otimes x) = 0$ für $x \in \mathcal{X}$ schon $\lambda_0 = 0$ folgt. Angenommen, es wäre $\lambda_0 \neq 0$, dann würde wegen $\iota(\lambda \otimes x) = \iota((\lambda_0 + \lambda_\infty) \otimes x) = \lambda_0 \cdot x + \lambda_\infty \cdot x$ und $v(\lambda_0 \cdot x) \neq v(\lambda_\infty \cdot x)$ folgen, dass $v(\lambda_0 \cdot x + \lambda_\infty \cdot x) = \min\{v(\lambda_0 \cdot x), v(\lambda_\infty \cdot x)\} \neq \infty$. Dies aber ist ein Widerspruch zu $\lambda_0 x + \lambda_\infty x = 0$.

- *Surjektivität*: Wir untersuchen nun das Bild des Homomorphismus $\iota$. Jedes Element $f \in \widehat{F}_\chi$ kann man als Summe $f = \sum_{x \in \mathcal{Y}} \sum_{g \in G} n_x g x$ schreiben, wobei $\mathcal{Y} \subseteq F$ eine endliche Menge ist. Es reicht zu zeigen, dass zu $x \in \mathcal{Y}$ jedes Element der Form $\sum_{g \in G} n_x g x \in \widehat{F}_\chi$ im Bild von $\iota$ liegt. Dies ist aber klar, da $\iota(\sum_{g \in G} n_x g \otimes x) = \sum_{g \in G} n_x g x$. □

### 3.3.3 Vervollständigungen von Abbildungen

Analog zur Novikov-Vervollständigung kann man auch auf $\widehat{F}_v$ mit Hilfe der Bewertung eine Metrik definieren. In dieser Topologie liegt $F$ dicht in $\widehat{F}_\chi$ und $\widehat{F}_\chi$ dicht in $\widehat{F}_v$.

Unter anderem bedeutet dies, dass es zu einer vorgegebenen Funktion höchstens eine hierdurch auf $\widehat{F}_\chi$ (bzw. auf $\widehat{F}_v$) induzierte Funktion geben kann.

Die Abbildung $v : F \to \mathbb{R}$ kann nur auf eine Weise auf $\widehat{F}_\chi$ stetig fortgesetzt werden. Die resultierende Abbildung $\widehat{v}$ stellt eine Bewertung des Kettenkomplexes $\widehat{F}_\chi$ da. Wir werden $\widehat{v}$ auch mit $v$ bezeichnen, wenn hieraus keine Missverständnisse entstehen.

**3.3.4 Lemma** *(Vervollständigen von Abbildungen)*

1. *Ist $\varphi : F \to F$ ein $G$-äquivarianter Endomorphismus eines freien Moduls, dann gibt es genau eine Abbildung $\widehat{\varphi} : \widehat{F}_\chi \to \widehat{F}_\chi$, die $\varphi$ stetig fortsetzt.*

2. *Ist $v$ eine naive Bewertung auf $F$, so ist* $\sup\{v(f) - v(\varphi(f)) | f \in F\} = \sup\{v(f) - v(\widehat{\varphi}(f)) | f \in \widehat{F}_\chi\}$.

*Beweis.* Es genügt, den Satz für endlich erzeugte freie Moduln zu zeigen. Für diese gilt, da $\varphi$ eine $G$-äquivariante Funktion ist, dass konvergente Folgen auf konvergente Folgen abgebildet werden. Insbesondere werden Nullfolgen auf Nullfolgen abgebildet. Dies zeigt die fehlende Existenz von $\widehat{\varphi}$. □

Es lassen sich auch mehrstellige Funktionen auf diese Art vervollständigen, insbesondere endliche Summen. Man kann aber noch einen Schritt weiter gehen. In den Vervollständigungen ist es möglich, gewissen unendlichen Summen einen Sinn zu geben:

**3.3.5 Definition** (unendliche Summen)

Sei $v$ eine Bewertung von $F$, die $\chi$ erweitert. Ist $\mathcal{F} \subseteq \widehat{F}_\chi$ eine Menge von Elementen mit der Eigenschaft, dass unterhalb jeder Höhe nur endlich viele Elemente in $\mathcal{F}$ liegen ($\forall r \in \mathbb{R}$ ist die Menge $\{\alpha \in \mathcal{F} | v(\alpha) \leq r\}$ endlich), dann gibt es eine wohldefinierte *Summe* $\sum_{\alpha \in \mathcal{F}} \alpha$. Sie ist gegeben durch

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{F}} \alpha = \lim_{r \to \infty} \sum_{v(\alpha) \leq r} \alpha.$$

Der Grenzwert existiert immer, denn $(\sum_{v(\alpha) \leq n)})_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge.

### 3.3.4 Vervollständigungen von Kettenkomplexen

Das Vervollständigen überträgt sich auf Kettenkomplexe. Sei $\mathbf{C}$ ein freier mit $v$ naiv bewerteter Kettenkomplex. Nach Lemma 3.3.4 folgt aus

$$\forall c \in \mathbf{C}, \quad v(c) \leq v \circ \partial(c),$$

dass

$$\forall c \in \widehat{\mathbf{C}}\chi, \quad \widehat{v}(c) \leq \widehat{v} \circ \widehat{\partial}(c).$$

Dies bedeutet: Ist $\mathbf{C}$ ein mit $v$ bewerteter Kettenkomplex, dann ist $\widehat{\mathbf{C}}\chi$ ein mit $\widehat{v}$ bewerteter Kettenkomplex.

**3.3.6 Definition** Ein freier Kettenkomplex $\mathbf{F}$ heißt *horo-$k$-azyklisch* bezüglich eines Charakters $\chi$, wenn

$$\forall i \leq k, \; H_i(\widehat{\mathbf{F}}\chi) = 0.$$

Die Elemente in $\widehat{\mathbf{F}}\chi$ werden Horo-Ketten genannt. Dementsprechend existieren auch Horo-Zyklen und Horo-Ränder.

Diese Definition deckt sich formal nicht mit der in [BiSt] gegebenen. Dort wird Horo-$k$-Azyklizität über den Komplex $\widehat{\mathbf{F}}_v$ definiert. Besitzt $\mathbf{F}$ jedoch ein endlich erzeugtes $k$-Gerüst, so fallen die beiden Begriffe zusammen, obwohl das $(k+1)$-Gerüst nicht notwendigerweise endlich erzeugt ist.

Im folgenden Kapitel wird die Beziehung der vervollständigten Komplexe zu den geometrischen Invarianten erklärt. Es wird gezeigt, dass sich die homologische geometrische Invariante durch Horo-Azyklizität beschreiben lässt.

# Kapitel 4

# Die homologische geometrische Gruppeninvariante $\Sigma^m(G; A)$

## 4.1 Definition von $\Sigma^m(G; A)$

Wir werden nun $\Sigma^m(G; A)$, die homologische geometrischen Gruppeninvariante, definieren.

Sei $A$ ein $G$-Modul vom Typ $FP_m$. Sei $\mathbf{F} \twoheadrightarrow A$ eine freie Auflösung, so dass $\mathbf{F}$ ein endlich erzeugtes $m$-Gerüst besitzt.

Wir wollen mit $\widetilde{\mathbf{F}}$ stets den augmentierten Kettenkomplex $\mathbf{F} \to A \to 0$ bezeichnen.

**4.1.1 Definition** $\Sigma^m(G; A) \subseteq S(G)$ ist die Menge aller Äquivalenzklassen von nicht-trivialen Charakteren $[\chi]$, für die eine Bewertung $v$ existiert, die $\chi$ erweitert, so dass $\{\widetilde{\mathbf{F}}_v^{[r,\infty)}\}$ im Wesentlichen $(m-1)$-azyklisch ist.

Man sieht leicht, dass eine solche Bewertung für einen Charakter genau dann existiert, wenn sie für alle Charaktere der Äquivalenzklasse gilt. Ist $v$ eine passende Bewertung für $\chi$ und $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, so ist $r \cdot v$ eine passende Bewertung von $r \cdot \chi$.

### 4.1.1 Horoazyklizität und die geometrische Invariante

**4.1.2 Satz** *Sei $A$ ein $G$-Modul vom Typ $FP_m$ und $\chi : G \to \mathbb{R}$ ein nicht-trivialer Charakter. Sei $\mathbf{F} \twoheadrightarrow A$ eine freie Auflösung mit endlich erzeugtem $m$-Gerüst $\mathbf{F}^{(m)}$ und $v : \mathbf{F} \to \mathbb{R}_\infty$ eine naive Bewertung auf $\mathbf{F}^{(m)}$, die $\chi$ erweitert. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *$\widetilde{\mathbf{F}}_v$ ist im Wesentlichen $(m-1)$-azyklisch.*
2. *$\mathbf{F}$ ist horo-$m$-azyklisch bezüglich $\chi$.*
3. *($\Sigma^m$-Kriterium): Es gibt einen $G$-äquivarianten Kettenhomomorphismus $\varphi : \mathbf{F} \to \mathbf{F}$, der die Identität von $A$ liftet, für den gilt:*
$$\forall f \in \mathbf{F}^{(m)}, \quad v(\varphi(f)) > v(f).$$

*Beweis.*

*(1. ⇒ 3.):* Ist $\widetilde{\mathbf{F}}_v$ im Wesentlichen $(m-1)$-azyklisch, dann gibt es eine reelle Zahl $D$, so dass es für alle $i$-Zyklen $z \in Z_i \subseteq \widetilde{\mathbf{F}}_v^{(m-1)}$ eine $i+1$ Kette $c$ mit $v(c) \geq v(z) - D$ und $\partial c = z$ gibt .

Sei $X^m$ eine $G$-Basis von $\mathbf{F}^{(m)}$. Wir konstruieren einen $G$-äquivarianten Kettenhomomorphismus $\varphi : \mathbf{F} \to \mathbf{F}$ per Induktion. Wir zeigen: Für alle $j \leq m$ gibt es eine, die Identität liftende, Kettenabbildung $\varphi : \mathbf{F}^{(j)} \to \mathbf{F}^{(j)}$, so dass
$$\forall c \in \mathbf{F}^{(j)}, \quad v(\varphi(c)) > v(c) + (m-j) \cdot D.$$

**Induktionsanfang:** Sei $g \in G$ so gewählt, dass $\chi(g) > D \cdot (m+1)$.

Wir werden das 0-Gerüst so weit anheben, dass sogar ein $m$-facher Lag von $D$ nicht wieder zum Originalniveau zurückführt.

Zu jedem $x \in X_0$ wählen wir ein $c_x$ so, dass $\partial c_x = g^{-1}\partial x$ und $v(c_x) \geq -D$. Wir definieren $\varphi$ auf dem 0-Gerüst von $\mathbf{F}$ durch $\varphi(x) = gc_x$ und führen dies $G$-äquivariant fort. Nach Lemma 3.1.4 wissen wir, dass für alle $c \in \mathbf{F}_0$ gilt:
$$v(\varphi(c)) \geq v(c) + \min_{x \in X_0}\{v(\varphi(x)) - v(x)\} > v(c) + m \cdot D.$$

**Induktionsschritt:** Nach Induktionsvoraussetzung gibt es einen Kettenhomomorphismus $\varphi : \mathbf{F}^{(j-1)} \to \mathbf{F}^{(j-1)}$, so dass
$$\forall c \in \mathbf{F}^{(j-1)}, \quad v(\varphi(c)) \geq v(c) + (m-(j-1)) \cdot D.$$

Sei weiter $X_j \subseteq X^m$ ein endliches Erzeugendensystem von $\mathbf{F}_j$. Da $\varphi$ Zyklen auf Zyklen abbildet, gibt es für alle $x \in X_j$ ein $c_x$, so dass $\partial c_x = \varphi(\partial x)$ und $v(c_x) \geq v(\varphi(\partial x)) - D$. Wir setzen $\varphi(x) = c_x$ und führen dies G-äquivariant auf $\mathbf{F}_j$ fort. Dann erhalten wieder auf Grund von Lemma 3.1.4 eine Abbildung $\varphi : \mathbf{F}^{(j)} \to \mathbf{F}^{(j)}$ mit der Eigenschaft:

$$\forall c \in \mathbf{F}^{(j)}, \quad v(\varphi(c)) > v(c) + (m - (j-1)) \cdot D - D \geq v(c) + (m-j) \cdot D.$$

*(3. ⇒ 2.):* Da $\varphi$ die Identität liftet, gibt es eine zugehörige $G$-äquivariante Homotopie $h : \mathbf{F} \to \mathbf{F}$, so dass $\partial h + h\partial = id_{\mathbf{F}} - \varphi$. Wir betrachten die Vervollständigungen von $h$ und $\varphi$. Es ist $\widehat{h} : \widehat{\mathbf{F}}_\chi \to \widehat{\mathbf{F}}_\chi$ eine Kettenabbildung vom Grad $(-1)$, für die es, da $\mathbf{F}^{(m)}$ endlich erzeugt ist, eine Konstante $D \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle Zyklen $k \in Z(\widehat{\mathbf{F}}^{(m)})$ gilt $v(\widehat{h}(k)) \geq v(k) + D$.

Für die Vervollständigung $\widehat{\varphi}$ von $\varphi$ auf $\widehat{\mathbf{F}}$ gibt es sogar eine positive Konstante $k > 0$, so dass für alle Ketten $c \in \widehat{\mathbf{F}}^{(m)}$ gilt $v(\widehat{\varphi}(c)) \geq v(c) + k$.

Wir wollen zeigen, dass $\mathbf{F}$ horo-$m$-azyklisch ist. Sei also $z$ ein $i$-Zyklus in $\widehat{\mathbf{F}}_\chi$ mit $i \leq m$. Um zu zeigen, dass $z$ ein Rand ist, konstruieren wir eine $(i+1)$-Kette unter Verwendung von $\widehat{\varphi}$ und $\widehat{h}$. Sei

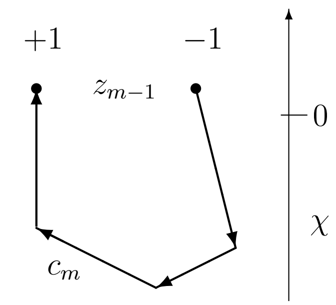
$$r = \widehat{h}(z) + \widehat{h}(\widehat{\varphi}(z)) + \widehat{h}(\widehat{\varphi}^2(z)) + \ldots = \widehat{h}(z + \widehat{\varphi}(z) + \widehat{\varphi}^2(z) + \ldots).$$

Wir überzeugen uns davon, dass $r$ eine $(i+1)$-Kette in $\widehat{\mathbf{F}}^{(m+1)}$ ist. Es ist $v(\widehat{h}(\widehat{\varphi}^i(z)) \geq v(\widehat{\varphi}^i(z)) + D \geq v(z) \cdot i \cdot k + D$, also zu jeder Zahl $n \in \mathbb{N}$ nur endlich viele $i$ mit $v((\widehat{h}(\widehat{\varphi}^i(z))) < n$. Die Summe ist also wohldefiniert (im Sinne von Definition 3.3.5). Weiter gilt:

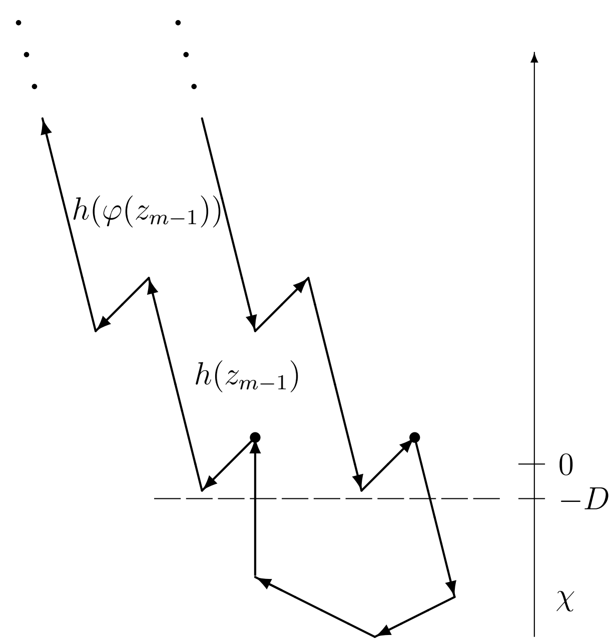
$$\partial r = \partial(\widehat{h}(z)) + \partial(\widehat{h}(\widehat{\varphi}(z))) + \ldots = (z - \widehat{\varphi}(z)) + (\widehat{\varphi}(z) - \widehat{\varphi}^2(z)) + \ldots = z.$$

*(2. ⇒ 1.):* Wir zeigen diese letzte Implikation über vollständige Induktion nach $m$. Wir setzen also voraus, dass der Satz für $k < m$ gilt. Unter dieser Voraussetzung gilt das $\Sigma$-Kriterium für $m-1$ und es gibt einen Kettenhomomorphismus $\varphi$ des $(m-1)$-Gerüstes, der die Identität liftet, sowie eine zugehörige Kettenhomotopie $h$ und eine positive reelle Zahl $D$ mit $v(h(k)) \geq v(k) - D$.

Aus $\mathbf{F}$ ist horo-m-azyklisch wollen wir folgern, dass $\widetilde{\mathbf{F}}_v$ im Wesentlichen $(m-1)$-azyklisch ist. Sei also $z_{m-1}$ ein $(m-1)$-Zyklus in $\widetilde{\mathbf{F}}_v$ mit $v(z_{m-1}) \geq 0$. Wir zeigen, dass es ein $d_m \in \mathbf{F}_m$ gibt, so dass $\partial(d_m) = z_{m-1}$ und $v(d_m) \geq -D$. Da $\mathbf{F}$ azyklisch ist gibt es eine $m$-Kette $c_m$ mit $\partial c_m = z_{m-1}$.




Für das $(m-1)$-Gerüst wissen wir bereits, dass es einen $G$-Kettenhomomorphismus $\varphi$ gibt, der die Identität und die Bewertung der Ketten erhöht. Hiermit konstruieren wir eine Horo-Kette $z_m^\infty = c_m + c_m^\infty$ in $\widehat{\mathbf{F}}^m$, indem wir $z_m^\infty = c_m - h(z_{m-1}) - h(\varphi(z_{m-1})) - h(\varphi^2(z_{m-1})) - \ldots$ festlegen.




Nach Voraussetzung ist dieser Horo-$m$-Zyklus der Rand einer $(m+1)$-Kette $c_{m+1}^\infty$, also $\partial c_{m+1}^\infty = z_m^\infty$. Wir schneiden diese $(m+1)$-Kette an der Höhe 0 ab und betrachten den Rand. Das bedeutet falls $c_{m+1}^\infty = \sum_{i\in I} n_i g_i f_i$ betrachten wir

$$c_{m+1} = \sum_{i\in I} \delta_i n_i g_i f_i, \text{ wobei } \delta_i = \begin{cases} 0 \text{ falls } v(g_i f_i) > 0 \\ 1 \text{ sonst} \end{cases}.$$

Sei $d_m = c_m - \partial c_{m+1}$. Es sind nun noch zwei Dinge zu verifizieren:

1. Die Kette $d_m$ besitzt die gewünschte Höhe, also $v(d_m) \geq -D$ .
2. Die Kette $d_m$ besitzt den gewünschten Rand, also $\partial d_m = z_{m-1}$.

zu 1.: Es ist

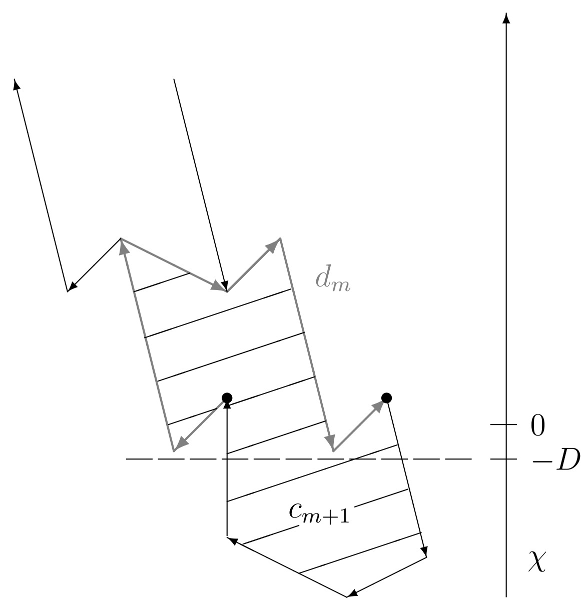
$$v\big(d_m\big) = v\big(c_m - \partial(c_{m+1})\big) \geq \min\{v\big(c_m - \partial(c^{\infty}_{m+1}\big), 0\} \geq$$

$$\min\{v\big(h(z_{m-1}) + h(\varphi(z_{m-1})) + h(\varphi^2(z_{m-1})) + \dots\big), 0\} \geq -D.$$

zu 2.: Es ist

$$\partial(d_m) = \partial c_m - \partial\partial c_{m+1} = z_{m-1} - 0 = z_{m-1}.$$

Die Addition eines Randes zum Zyklus $c_m$ verändert dessen Rand nicht.




Es ist kein Induktionsanfang gegeben. Es ist aber leicht einzusehen, dass der Satz für $(m = -1)$ gilt. Man überlegt sich nun, dass dies ein zulässiger Induktionsanfang ist. □

Der Satz zeigt unter anderem: Ob der Kettenkomplex $\widetilde{\mathbf{F}}_v$ im Wesentlichen $(m-1)$-azyklisch ist oder nicht, ist unabhängig von der gewählten Basis und der zugehörigen Bewertung $v$.

Die Abbildung $\widehat{h}\circ(\mathrm{id}+\widehat{\varphi}+\widehat{\varphi}^2+\ldots)$ ist eine Homotopie, die das $m$-Gerüst zusammenzieht. Sie ist als eine Abbildung zu sehen, die die Zyklen beliebig weit in positiver Richtung verschiebt.

## 4.2 Die Novikov-Vervollständigung und die geometrische Invariante

Wir haben gesehen, dass sich die Invariante $\Sigma^m(G;A)$ durch Horo-Azyklizität beschreiben lässt. Diese besitzt, wie man aus Satz 3.3.3 erkennen kann, einen engen Zusammenhang zur Novikov-Vervollständigung. Der Zusammenhang spiegelt sich in folgendem Satz wieder:

**4.2.1 Satz** *Sei $A$ ein $G$-Modul vom Typ $FP_m$ und $\chi : G \to \mathbb{R}_\infty$ ein nicht-trivialer Charakter. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. $[\chi] \in \Sigma^m(G;A)$,
2. $\forall i \leq m, \quad \mathrm{Tor}_i^{\mathbb{Z}G}(\widehat{\mathbb{Z}G}_\chi, A) = 0.$

*Beweis.* Sei $\mathbf{F} \twoheadrightarrow A$ eine freie Auflösung mit endlich erzeugtem $m$-Gerüst $\mathbf{F}^{(m)}$. Nach Satz 4.1.2 reicht es zu zeigen:

$$\forall i \leq m,\ Tor_i^{\mathbb{Z}G}(\widehat{\mathbb{Z}G}_\chi, A) = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{F} \text{ ist horo-}m\text{-azyklisch bezüglich } \chi.$$

Nun gilt aber per Definition

$$\forall i \leq m,\ Tor_i^{\mathbb{Z}G}(\widehat{\mathbb{Z}G}_\chi, A) = 0$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\widehat{\mathbb{Z}G}_\chi \bigotimes_{\mathbb{Z}G} \mathbf{F} \text{ ist exakt bis zur Dimension } m.$$

Es ist leicht zu verifizieren, dass der in Satz 3.3.3 gegebene Modulisomorphismus $\widehat{\mathbb{Z}G}_\chi \bigotimes_{\mathbb{Z}G} \mathbf{F} \cong \widehat{\mathbf{F}}_\chi$ auch ein Kettenisomorphismus ist. □

## 4.3 Direkte Produkte

In diesem Abschnitt wollen wir sehen, welchen Weg man einschlagen muss, um vervollständigte Komplexe zur Berechnung der geometrischen Invariante zu verwenden. Auf Grund der großen Analogie zu den Methoden bei Gruppenringen werden wir diese zuerst beschreiben und dann die Schwierigkeiten, auf die man bei der Betrachtung von Novikov-Vervollständigungen trifft.

### 4.3.1 Gruppenringe

Seien $\mathbf{F} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$ (und $\mathbf{F}' \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$) projektive Auflösungen von $\mathbb{Z}$ über $\mathbb{Z}G$ (und $\mathbb{Z}H$) mit endlich erzeugtem $m$ Gerüst. Dann ist $\mathbf{F} \otimes \mathbf{F}'$ eine projektive Auflösung von $\mathbb{Z}$ über $\mathbb{Z}[G \times H]$ mit endlich erzeugtem $m$-Gerüst und es gilt:

$$(\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbf{F}) \otimes (\mathbb{Z}H \otimes_{\mathbb{Z}H} \mathbf{F}') \cong (\mathbb{Z}G \otimes \mathbb{Z}H) \otimes_{\mathbb{Z}[G \times H]} (\mathbf{F} \otimes \mathbf{F}').$$

Wie schon in Satz 2.2.11 erwähnt, ist $\mathbb{Z}G \otimes \mathbb{Z}H = \mathbb{Z}[G \times H]$. Mit etwas Aufwand sieht man, dass diese Abbildung zu einer Abbildung der Homologiegruppen führt, woraus man schließlich erhält:

**4.3.1 Satz** *(Künneth-Formel) Seien $G$ und $H$ Gruppen, $\mathbf{F} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$ und $\mathbf{F}' \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$ freie Auflösungen von $\mathbb{Z}$ über $\mathbb{Z}G$ und $\mathbb{Z}H$, dann gibt es eine spaltende, kurzexakte Folge:*

$$\begin{aligned} 0 \quad \to \quad & \bigoplus_{p+q=n} H_p(\mathbb{Z}G \otimes_G \mathbf{F}) \otimes_{\mathbb{Z}} H_q(\mathbb{Z}H \otimes_H \mathbf{F}') \\ \to \quad & H_n\big(\mathbb{Z}[G \times H] \otimes_{G \times H} (\mathbf{F} \otimes \mathbf{F}')\big) \\ \to \quad & \bigoplus_{p+q=n-1} \operatorname{Tor}_1 \big(H_p(\mathbb{Z}G \otimes_G \mathbf{F}), H_q(\mathbb{Z}H \otimes_H \mathbf{F}')\big) \to 0 \end{aligned}$$

Siehe z.B. [Br] für Details hierzu. Für uns von Bedeutung ist daran der folgende Sachverhalt: Ist $H_p(\mathbb{Z}G \otimes_G \mathbf{F}) \otimes_{\mathbb{Z}} \neq 0$ und $H_q(\mathbb{Z}H \otimes_H \mathbf{F}') \neq 0$, so ist $H_{p+q}\big(\mathbb{Z}[G \times H] \otimes_{G \times H} (\mathbf{F} \otimes \mathbf{F}')\big) \neq 0$. Das Interesse an dieser Aussage kommt aus der Vermutung des folgenden Abschnittes.

### 4.3.2 Novikov-Ringe

Es wird vermutet, dass sich die geometrische Invariante eines direkten Produktes aus den geometrischen Invarianten der Faktoren berechnen lässt. Man weiß, dass die analoge Vermutung in der homotopischen Version nicht korrekt ist. Die Zusammenhänge, in [Bi] ausführlich dargestellt, werden wie folgt angenommen:

**4.3.2 Vermutung** (Direkte-Produkt-Vermutung)

Seien $G$ und $G'$ Gruppen vom Typ $FP_n$, dann ist

$$\Sigma^m(G;\mathbb{Z})^c = \bigcup_{p+q=n} \Sigma^p(G;\mathbb{Z})^c + \Sigma^q(G';\mathbb{Z})^c.$$

Wobei die Addition hier die in Abschnitt 1.2 definierte Verknüpfung ist. und $^c$ das Komplement bezeichnet. Für diverse Spezialfälle ist die Gültigkeit der Vermutung schon bekannt. Die Vermutung ist äquivalent zu folgender Aussage:

**4.3.3 Vermutung** (Direkte-Produkt-Vermutung)

Seien $G$ und $H$ Gruppen vom Typ $FP_n$ mit zugehörigen Charakteren $\chi_G$ und $\chi_H$, dann gilt:

$$\min\left\{p \,\middle|\, H_p(\widehat{\mathbf{F}}_{\chi_G}) \neq 0\right\} + \min\left\{q \,\middle|\, H_q(\widehat{\mathbf{F}'}_{\chi_H}) \neq 0\right\} =$$

$$\min\left\{n \,\middle|\, H_n(\widehat{\mathbf{F}\otimes\mathbf{F}'}_{\chi_G+\chi_H}) \neq 0\right\}$$

Man möchte also einen Zusammenhang zwischen den Kettenkomplexen $\widehat{\mathbf{F}}_{\chi_G}$, $\widehat{\mathbf{F}}'_{\chi_H}$ und $\widehat{\mathbf{F}\otimes\mathbf{F}'}_{\chi_G+\chi_H}$ erkennen. Man sieht leicht an Hand eines kanonischen Isomorphismus, dass

$$(\widehat{\mathbb{Z}G}_{\chi_G} \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbf{F}) \otimes (\widehat{\mathbb{Z}H}_{\chi_H} \otimes_{\mathbb{Z}H} \mathbf{F}') \cong (\widehat{\mathbb{Z}G}_{\chi_G} \otimes \widehat{\mathbb{Z}H}_{\chi_H}) \otimes_{\mathbb{Z}[G\times H]} (\mathbf{F}\otimes\mathbf{F}').$$

In Satz 2.2.12 haben wir gesehen, dass das Ausmultiplizieren eine injektive Abbildung vom Tensorprodukt zweier Vervollständigungen in die Vervollständigung des direkten Produktes ist. Hieraus erhält man zusätzlich eine injektive Abbildung

$$\iota : (\widehat{\mathbb{Z}G}_{\chi_G} \otimes \widehat{\mathbb{Z}H}_{\chi_H}) \otimes_{\mathbb{Z}[G\times H]} (\mathbf{F} \otimes \mathbf{F}') \to (\mathbb{Z}\widehat{[G \times H]}_{\chi_G+\chi_H}) \otimes_{\mathbb{Z}[G\times H]} (\mathbf{F} \otimes \mathbf{F}').$$

Zusammensetzen dieser Abbildung und des Isomorphismus führt zu einer injektiven Abbildung

$$\times : \widehat{\mathbf{F}}_{\chi_G} \otimes \widehat{\mathbf{F}}'_{\chi_H} \to \widehat{\mathbf{F} \otimes \mathbf{F}'}_{\chi_G+\chi_H}.$$

Ist $c \otimes c'$ ein Elementartensor, so bezeichnen wir sein Bild mit $c \times c'$

Wir wollen nun, so wie dies in der Künneth-Formel geschieht, zu den Homologien der Komplexe übergehen. Dafür untersuchen wir, wie sich die Abbildung auf Zyklen verhält.

**4.3.4 Lemma** *Seien $z_G$ und $z_H$ Zyklen in $\widehat{\mathbf{F}}_{\chi_G}$ und $\widehat{\mathbf{F}'}_{\chi_H}$. Dann gilt:*

- *$z_G \times z_H$ ist ebenfalls ein Zyklus, denn*

$$\partial(z_G \times z_H) = \partial z_G \times z_H + z_G \times (-1)^{\epsilon} \partial z_H = 0.$$

- *Ist $z_G$ sogar ein Rand, etwa $\partial(z'_G) = z_G$, dann ist $z_G \times z_H = \partial(z'_G \times z_H)$ ebenfalls ein Rand.*

- *Analog ist, falls $z_H$ ein Rand ist, die Kette $z_G \times z_H$ ebenfalls ein Rand.*

Die Abbildung $\times$ führt also zu einer Abbildungen der Homologiegruppen:

**4.3.5 Satz** *(Homologie-Kreuzprodukt)*

*Sind $G$ und $H$ Gruppen mit Auflösungen $\mathbf{F}$ und $\mathbf{F}'$, dann gibt es für alle $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Abbildung*

$$\bigoplus_{p+q=n} H_p(\widehat{\mathbf{F}}_{\chi_G}) \otimes_{\mathbb{Z}} H_q(\widehat{\mathbf{F}'}_{\chi_H}) \to H_n\big(\widehat{\mathbf{F} \otimes \mathbf{F}'}_{\chi_G+\chi_H}\big).$$

Die Künneth-Formel lässt vermuten, dass dieses Homologie-Kreuzprodukt injektiv ist. Die Injektivität würde ausreichen, um eine Inklusion der Direkten-Produkt-Vermutung zu zeigen.

# Literaturverzeichnis


[BeBr] M. Bestvina and N. Brady, *Morse theory and finiteness properties of groups*, Invent. math. **129**, 445-470

[Bi] R. Bieri, *Finitess length and connectivity length for for groups*, Geometric group theory down under, (Canberra 1996), 9-22, de Gruyter, Berlin, (1999)

[Bi 2] R. Bieri, *Deficiency and the geometric invariants of a group*, submitted

[BiGe] R. Bieri and R. Geoghegan, *Connecticity properties of group actions on non-positively curved spaces*, Memoirs of the American Mathematical Society, **765**

[BNS] R. Bieri, W. D. Neumann and R. Strebel, *A geometric invariant of discrete groups*, Invent. math. **90** (1987), 451-477

[BiRe] R. Bieri and B. Renz , *Valuations on free resolutions and higher geometric invariants of groups*, Comment. Math. Helvetici **63** (1988), 464-497

[BiSt] R. Bieri and R. Strebel, *Invariants for discrete groups*, preprint

[Br] K.S.Brown, *Cohomology of groups*, Graduate Texts in Mathematics, Springer Berlin, 1982

[Br2] K.S.Brown, *Finite properties of groups*, J. Pure Appl. Algebra **44** (1987), 45-75

[BuGo] K. Bux and C. Gonzales, *The Bestvina-Brady Constuction Revisited: Geometric Computation of $\Sigma$-Invariants for right angled Artin Groups*, J. London Math. Soc. (2) **60** (1999), 793-801

[Dl] T. Delzant, *Sur l'anneau d'un group hyperbolique*, C. R. Acad. Sci. Paris **324** I (1997), 381-384

[Ge] R. Gehrke, *Die höheren geometrischen Invarianten für Gruppen mit Kommutatorrelationen*, Dissertation, Frankfurt (1992)

[Ko] D. Kochloukova, *Some Novikov rings that are von Neumann finite*, submitted

[KLM] P.H.Kropholler, P.A. Linell and J.A.Moody, *Applications of a new K-theoretic theorem to solubale group rings*, Proc. Amer. Math. Soc. **104** (1988), 675–684

[Pa] D.S.Passmann, *The algebraic structure of group rings*, Wiley-Interscience, New York (1977)

[Re] B. Renz, *Geometrische Invarianten und Endlichkeitseigenschaften von Gruppen*, Dissertation, Frankfurt (1987)

[Sik] J.-C. Sikorav, *Homologie de Novikov associée à une classe de cohomologie réelle de degré un.* Thèse Orsay, (1987)