

別刷

計測自動制御学会 論文集

年 第 卷 第 号

(P. ~P.)



社団法人 計測自動制御学会

拡張 H_∞ 制御 - H_∞ サーボ問題と推定問題の統一解法 6

美多 勉*・忻 欣*
富山 仁博*・Brian D. O. ANDERSON**

Extended H_∞ Control - Unified solutions to H_∞ servo and H_∞ estimation problems-

Tsutomu MITA*, Xin XIN*,
Kimihito TOMIYAMA* and Brian D. O. ANDERSON**

This paper solves H_∞ control problems for plants having unstable weighting functions and applies the results to an H_∞ servo problem as well as an H_∞ estimation problem.

Key Words: Unstable weighting function, Extended H_∞ control, H_∞ servo problem, H_∞ estimation problem

1. はじめに

昨今、 H_∞ 制御が産業応用される機会が多いが、 H_∞ 制御理論は未だ整備されていない問題を持つ。その一つが不安定重みを持つ H_∞ 制御問題であり、不安定極を虚軸上のものに限定すれば、この問題は H_∞ サーボ問題を含み⁴⁾、不安定なものに注目すれば、制御対象が不安定な場合の H_∞ 推定問題やLTR問題を含む^{10), 9)}。

重みが $j\omega$ 極を持つ H_∞ 制御問題に対しては、筆者らは様々な見地から研究してきた。まとめると以下ようになる。

1. 文献³⁾の一般化 H_∞ 制御は証明が複雑で、しかも、制御系や制御器の構造も明らかでない。

2. 文献^{4), 2)}ではこの点を改良し、 H_∞ サーボ問題に解を与えた。ただし、重みの $j\omega$ 極を制御器が極の一部として持つための十分条件($C_2V = 0, UB_2 = 0$)を導入して数式展開をしたため、この条件がなくても H_∞ 制御問題が可解か否か分からず、 H_∞ 推定問題やLTR問題にも適用できない。

3. 文献⁵⁾ではこの問題を解決し、文献³⁾同等の結果を得ている。しかし、必要条件の証明が複雑であった。

そこで、本論文では、まず文献^{6), 7)}で示した総合安定なる概念を使い、重みに虚軸上に限定しない意味で不安定極が存在する場合の H_∞ 制御問題を、条件($C_2V = 0, UB_2 = 0$)を使わず解き、拡張 H_∞ 制御と呼ぶ。そして、応用として、重

みの不安定極が拡張 H_∞ 制御器の極となる条件を再考すると共に、 H_∞ サーボ問題を解き、さらに、 H_∞ 推定問題を扱う。

なお、 H_∞ 推定問題に対する本論文の解法は、推定器のパラメトリゼーション^{12), 11)}を使う必要がなく、直接的である。

記号の約束として、LFT形式のスター積

$$F_l(M_1, F_l(M_2, K)) = F_l(M, K)$$

を満たす M を $M = M_1 * M_2$ と記述する。また、変換行列 T による相似変換で次の操作をすることと定義する。

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} T^{-1}AT & T^{-1}B \\ \hline CT & D \end{array} \right]$$

2. 準備と標準 H_∞ 制御問題

本論文で考察する一般化プラントは

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1w + B_2u \\ z &= C_1x + D_{12}u \\ y &= C_2x + D_{21}u \end{aligned} \quad (1)$$

あるいは

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & 0 & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

で記述されるものとする。ここで、 x は状態変数、 w は外部入力、 u は操作量、 z は制御量、 y は観測量である。また、

$$u = K(s)y \quad (3)$$

が制御則であり、制御目的は後で述べる意味で制御系を安定化し、かつ、閉ループ系の w から z までの伝達関数

$$G_{zw} = F_l(G, K) = G_{11} + G_{12}K(I - G_{22}K)^{-1}G_{21} \quad (4)$$

の H_∞ ノルムを1未満、すなわち、

† DSTシンポジウムで発表, 1996

* 東京工業大学 工学部 目黒区大岡山2-12-1

**

* Faculty of Engineering, Tokyo Institute of Technology, Meguro-ku, Tokyo

** Research Center for Information Science and Engineering, Australian National University, Canberra, Australia

(Received August 20, 1996)

$$G_{zw}(s) \in BH_\infty \quad (5)$$

とするものである。

また、 D_{12} は列フルランク、 D_{21} は行フルランクと仮定し

$$\begin{bmatrix} D_{12}^\dagger \\ D_{12}^\perp \end{bmatrix} (D_{12}, (D_{12}^\dagger)^T) = I, \quad \begin{bmatrix} D_{21} \\ (D_{21}^\dagger)^T \end{bmatrix} (D_{21}^\dagger, D_{21}^\perp) = I$$

を満たす $D_{12}^\dagger, D_{12}^\perp, D_{21}^\dagger, D_{21}^\perp$ を定義しておく。なお、 D_{12} が正方のときには $D_{12}^\dagger = 0, D_{21}$ が正方なときには、 $D_{21}^\dagger = 0$ とおく。上式の各行列は正方だから掛け算の順番を交換して整理すれば

$$(D_{12}^\dagger)^T D_{12}^\perp = I - D_{12} D_{12}^\dagger, \quad D_{21}^\dagger (D_{21}^\perp)^T = I - D_{21}^\dagger D_{21}$$

が成り立ち、以下特に注意せず利用する。

さて、 H_∞ 制御問題を解くに当たり、以下の仮定が良く知られている。

A1) (A, B_2) は可安定

A2) $G_{12}(s)$ は $j\omega$ 不変零点を持たない。このことは

$$(A - B_2 D_{12}^\dagger C_1, D_{12}^\perp C_1) \quad (6)$$

が不可観測な $j\omega$ 極を持たないことに等価である²⁾。

B1) (A, C_2) は可検出

B2) $G_{21}(s)$ は $j\omega$ 不変零点を持たない。このことは

$$(A - B_1 D_{21}^\dagger C_2, B_1 D_{21}^\perp) \quad (7)$$

が不可制御な $j\omega$ 極を持たないことに等価である。

これらの仮定のもとで、 G と K からなる閉ループ系(G, K)を内部安定にし、かつ、(5)式を満たす問題は標準 H_∞ 制御として知られており、その解は次の定理で与えられる。

《定理1》 (標準 H_∞ 制御の解)

仮定A1)、A2)、B1)、B2)のもとで、 H_∞ 制御問題の可解条件は以下の1.~3.が成り立つことである。

$$1. \quad X(A - B_2 D_{12}^\dagger C_1) + (A - B_2 D_{12}^\dagger C_1)^T X + X(B_1 B_1^T - B_2 E_{12}^{-1} B_2^T) X + C_1^T (D_{12}^\dagger)^T D_{12}^\perp C_1 = 0 \quad (8)$$

が次の A_X を安定にする意味で安定化解 $X \geq 0$ を持つ。

$$A_X = A - B_2 D_{12}^\dagger C_1 + (B_1 B_1^T - B_2 E_{12}^{-1} B_2^T) X \quad (9)$$

ただし、 $E_{12} = D_{12}^T D_{12}$ 。

$$2. \quad Y(A - B_1 D_{21}^\dagger C_2)^T + (A - B_1 D_{21}^\dagger C_2) Y + Y(C_1^T C_1 - C_2^T E_{21}^{-1} C_2) Y + B_1 D_{21}^\dagger (D_{21}^\dagger)^T B_1^T = 0 \quad (10)$$

が次の A_Y を安定にする意味で安定解 $Y \geq 0$ を持つ。

$$A_Y = A - B_1 D_{21}^\dagger C_2^T + Y(C_1^T C_1 - C_2^T E_{21}^{-1} C_2) \quad (11)$$

ただし、 $E_{21} = D_{21} D_{21}^T$ 。

$$3. \quad \rho(YX) < 1 \quad (12)$$

また、以上の可解条件が成り立つとき、標準 H_∞ 制御器は次式で与えられる。

$$K_\infty(s) = F_i(M^\infty(s), N(s)) \quad (13)$$

: $M^\infty(s)$

$$= \left[\begin{array}{c|cc} \hat{A} & -ZL_\infty & Z\hat{B}_2 E_{12}^{-1/2} \\ \hline F_\infty & 0 & E_{12}^{-1/2} \\ -E_{21}^{-1/2} \hat{C}_2 & E_{21}^{-1/2} & 0 \end{array} \right] \quad (14)$$

$$\hat{A} = A + B_1 B_1^T X + B_2 F_\infty + ZL_\infty \hat{C}_2$$

$$F_\infty = -D_{12}^\dagger C_1 - E_{12}^{-1} B_2^T X$$

$$L_\infty = -B_1 D_{21}^\dagger - Y C_2^T E_{21}^{-1} \quad (15)$$

$$\hat{B}_2 = B_2 + Y C_1^T D_{12}, \quad \hat{C}_2 = C_2 + D_{21} B_1^T X$$

$$Z = (I - YX)^{-1}$$

ただし、 $N(s) \in BH_\infty$ は自由パラメータである。■

3. 総合安定と拡張 H_∞ 制御

3.1 総合安定と総合安定化器の表現

本論文では以下一般化プラント $G(s)$ が図1のように、 u に結合されないが、 w に直結された重み $W_w(s)$ 、あるいは、 y に結合されないが、 z に直結された重み $W_z(s)$ を持ち、しかも、これらが不安定極を持つ場合を考える。ただし、これらの重みは最小実現されているとする。

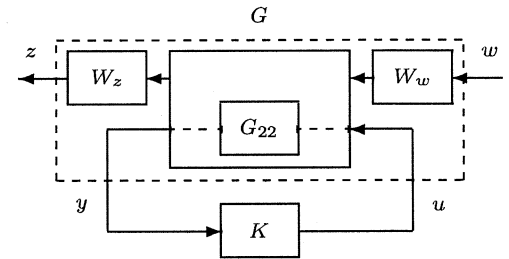


Fig.1 入力重み W_w と出力重み W_z

不安定極を数式表現するため、 W_w, W_z を

$$W_w(s) = \left[\begin{array}{c|c} \hat{A}_w & \hat{B}_w \\ \hline \hat{C}_w & \hat{D}_w \end{array} \right], \quad W_z(s) = \left[\begin{array}{c|c} \hat{A}_z & \hat{B}_z \\ \hline \hat{C}_z & \hat{D}_z \end{array} \right]$$

とし、さらに、 A_w, A_z を夫々、 \hat{A}_w, \hat{A}_z のすべての不安定固有値とその固有構造を抽出した行列とする。すなわち、適当な列フルランク行列 T_w 、行フルランク行列 T_z によって、

$$\hat{A}_w T_w = T_w A_w, \quad T_z \hat{A}_z = A_z T_z \quad (16)$$

が成り立ち、 $Re(\lambda_i(A_w)) \geq 0, Re(\lambda_i(A_z)) \geq 0$ を満たすものとする。明らかに、 $\lambda_i(A_w), \lambda_i(A_z)$ は A の固有値の一部となり、しかも、図1から以下が成り立つ。

1. $\lambda_i(A_w)$ は (A, B_1) の不可制御モードであるが、 (A, B_2) の不安定な不可制御モードである。
2. $\lambda_i(A_z)$ は (A, C_1) の可観測モードであるが、 (A, C_2) の不安定な不可観測モードである。

この場合、仮定A1)、あるいは、B1)が成り立たず、対応する H_∞ 制御問題は標準問題とならない。本論文の目的はこの場合でも(5)式を満たす H_∞ 制御問題を拡張 H_∞ 制御として定式化し、解を与えることである。

まず、仮定A1)やB1)が成り立たない場合、 (G, K) からなる閉ループ系は内部安定にはできないが、不安定重みは制御器の設計に使うものであり、実際にハードウェアで実現するものでない。よって、 (G_{22}, K) からなる物理的な閉ループ系だけを内部安定にすれば十分である。これを⁴⁾では**実質安定**と言った。これは重みを除いた全系が内部安定であることに等価である。また、(5)式が達成されるためには、実質安定を保ちつつ、このような不安定モードが閉ループ系の零点で相殺され

$$G_{zw}(s) \in RH_{\infty} \quad (17)$$

となり、 H_{∞} ノルムが定義できることが必要である。これは、 A_w を z からの不可観測モード、 A_z を w からの不可制御モードにするように $K(s)$ を設計することに当たる。実質安定、かつ、(17)式が成り立つとき、**総合安定**と言い、総合安定を達成する $K(s)$ を**総合安定化器**と言う^{6), 7)}。

よって、本論文での H_{∞} 制御問題は総合安定化器 $K(s)$ の中で(5)式を満たすものを見つけることとなる。これを**拡張 H_{∞} 制御**と言い、対応する制御器を**拡張 H_{∞} 制御器**と言う。

以下、総合安定に関する従来の結果を紹介するとともに、拡張 H_{∞} 制御が解けるために必要な前提条件を求めて見よう。

まず、上の1、2の考察に鑑み、仮定A1), B1)を以下のまで緩和する。

A1') (A, B_2) の不可制御かつ不安定な極は $\lambda_i(A_w)$ に限られる。

B1') (A, C_2) の不可観測かつ不安定な極は $\lambda_i(A_z)$ に限られる。

C1') A に対する A_w と A_z の固有基底は線形独立である。ここで、仮定C1')は A_w と A_z を区別するために導入したものであり、この仮定のもとで、仮定A1')は $\lambda_i(A_z)$ が (A, B_2) の可制御極であることを、仮定B1')は $\lambda_i(A_w)$ が (A, C_2) の可観測極であることを含む。これは、開ループ系(実制御対象)の零点が重みの不安定極を消去することがないことを意味している。すると、次の定理を得る⁶⁾。

《**定理2**》 (総合安定と総合安定化器) 仮定A1'), B1'), C1')が成り立つとする。すると以下が成り立つ。

1. 総合安定化器が存在するため必要十分条件は

$$(A - B_2 D_{12}^{\dagger} C_1) V = V A_w, \quad D_{12}^{\dagger} C_1 V = 0 \quad (18)$$

$$\mathcal{R}(V) \bigcup C = \emptyset \quad (19)$$

を満たす列フルランクな V と

$$U(A - B_1 D_{21}^{\dagger} C_2) = A_z U, \quad U B_1 D_{21}^{\dagger} = 0 \quad (20)$$

$$\mathcal{R}(U^T) \bigcup O = \emptyset \quad (21)$$

を満たす行フルランクな U が存在することである。ここで、 C は (A, B_2) の可制御空間であり、 $C = \sum_{i=0}^{n-1} A^i \mathcal{R}(B_2)$ で表現される。ただし、 n は A の次元、 \mathcal{R} は値域を示す。また、 O は (A, C_2) の可観測空間であり、 $O = \sum_{i=0}^{n-1} (A^T)^i \mathcal{R}(C_2^T)$ で表現される。

2. 第1項が成り立つとき総合安定化器は次式で与えられる。

$$K(s) = F_l(M, Q) \quad (22)$$

ただし

$$M = \left[\begin{array}{cc|cc} A + B_2 F + H C_2 & -H & B_2 & \\ \hline F & 0 & I & \\ C_2 & -I & 0 & \end{array} \right], Q \quad (23)$$

また、 $Q(s)$ は $Q \in RH_{\infty}$ を満たす任意な伝達関数で、 F は

$$F = -D_{12}^{\dagger} C_1 + \alpha \quad : \alpha V = 0 \quad (24)$$

を満たし、 $A + B_2 F$ の $\lambda_i(A_w)$ 以外の固有値を安定にする任意の係数であり、 H は

$$H = -B_1 D_{21}^{\dagger} + \beta \quad : U \beta = 0 \quad (25)$$

を満たし、 $A + H C_2$ の $\lambda_i(A_z)$ 以外の固有値を安定にする任意の係数である。■

(注意1) 1. 総合安定化器の形式は従来の安定化器²⁾と同一である。また、(22)式を(4)式に代入し、 $G^Q = G * M$ を計算すると、以下が成り立つ。

$$G_{zw} = F_l(G^Q, Q) \quad (26)$$

: $G^Q =$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} A + B_2 F & -B_2 F & B_1 & B_2 \\ \hline 0 & A + H C_2 & B_1 + H D_{21} & 0 \\ \hline C_1 + D_{12} F & -D_{12} F & 0 & D_{12} \\ \hline 0 & -C_2 & -D_{21} & 0 \end{array} \right]$$

2. (21)式、(19)式は、夫々、 $\lambda_i(A_w)$ 、 $\lambda_i(A_z)$ が重みの極であることを保証するための必要十分条件である⁶⁾。

3.2 拡張 H_{∞} 制御と拡張 H_{∞} 制御器

さて、(18)式、(20)式は G_{12} 、 G_{21} が夫々 $\lambda_i(A_w)$ 、 $\lambda_i(A_z)$ を不変零点にすることを意味している。しかし、この条件は標準 H_{∞} 制御の前提条件A2)、B2)に反する。そこで、拡張 H_{∞} 制御問題の前提条件として、A2)、B2)を以下のものまで緩和する。

A2') (18)式、(19)式が成り立ち、 $G_{12}(s)$ は $\lambda_i(A_w)$ を不変零点とする。しかし、 $\lambda_i(A_w)$ から導かれる可能性のあるもの以外、 $G_{12}(s)$ は $j\omega$ 不変零点を持たない。

B2') (20)式、(21)式が成り立ち、 $G_{21}(s)$ は $\lambda_i(A_z)$ を不変零点とする。しかし、 $\lambda_i(A_z)$ から導かれる可能性のあるもの以外、 $G_{21}(s)$ は $j\omega$ 不変零点を持たない。

次にリカッチ方程式の擬似安定化について定義しておく。

【定義1】 (擬似安定化)

1. (8)式の実対称解で、 $XV = 0$ を満たし、かつ、(9)式の A_X の固有値で $\lambda_i(A_w)$ 以外のものが安定であるとする。これを、(8)式の**擬似安定化**と言う。

2. (10)式の実対称解で $UY = 0$ を満たし、かつ、(11)式の A_Y の固有値で $\lambda_i(A_z)$ 以外のものが安定であるとする。これを、(10)式の**擬似安定化**と言う。■

なお、擬似安定化は存在すれば唯一であることが知られている^{2), 4)}。また、 $\lambda_i(A_w)$ (あるいは、 $\lambda_i(A_z)$)が存在しな

いときには、疑似安定化解 X (あるいは、 Y) は安定化解となる。この疑似安定化解を使えば次の主要定理を得る。

《定理 3》 (拡張 H_∞ 制御の解)

1. 仮定 $A1'$, $A2'$, $B1'$, $B2'$, $C1'$ のもとで、拡張 H_∞ 制御問題の可解条件は、(8) 式と (10) 式が夫々疑似安定化解、 $X \geq 0$ と $Y \geq 0$ を持ち、かつ、(12) 式が成り立つことである。

2. 可解条件が成り立つとき、 H_∞ 制御器は (13) 式以下で X , Y を疑似安定化解に代えたもので与えられる。■

この定理は、重みの極として開右半面にあるものまで許し、かつ、 $C_2V = 0$, $UB_2 = 0$ 等の制約条件を付けない一般的なものであり、この点で⁴⁾の拡張となっている。

3.3 疑似安定化解の構造

次章以降で使うため、正準系を導入し、疑似安定化解 X , Y の構造を述べておく。これは文献⁴⁾でも別の記号体系で扱われている。

まず、(18) 式の V の補助基底として V_2 を

$$T = (V, V_2) \quad (27)$$

が正則になるように選ぶと

$$T^{-1}(A - B_2D_{12}^{\dagger}C_1)T = \begin{bmatrix} A_w & A_w2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$D_{12}^{\dagger}C_1T = (0, \gamma)$$

の形式におけるので、これに合わせて

$$T^{-1}B_1 = \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{12} \end{bmatrix}, \quad T^{-1}B_2 = \begin{bmatrix} B_{21} \\ B_{22} \end{bmatrix} \quad (29)$$

とおいておく。すると、仮定 $A1'$, $A2'$ から (A_2, B_{22}) は可安定、 (A_2, γ) は虚軸上で可観測となる。

一方、 $XV = 0$ の条件から疑似安定化解は

$$T^T X T = \text{diag}(0, X_2) \geq 0 \quad (30)$$

の形式を満たさなければならない。そこで、(8) 式に T^T , T を左右からかけたものに (30) 式を代入すると、その唯一非零の第 (2,2) ブロックは

$$X_2 A_2 + A_2^T X_2 + X_2 (B_{12} B_{12}^T - B_{22} E_{12}^{-1} B_{22}^T) X_2 + \gamma^T \gamma = 0 \quad (31)$$

となる。すると、(8) 式が疑似安定化解 $X \geq 0$ を持つとき、 $X_2 \geq 0$ は (31) 式の安定化解となる。なぜならば、

$$T^{-1} A_X T = \begin{bmatrix} A_w & * \\ 0 & A_{X_2} \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$: A_{X_2} = A_2 + (B_{12} B_{12}^T - B_{22} E_{12}^{-1} B_{22}^T) X_2 \quad (33)$$

が成り立つので、疑似安定化解の定義から A_{X_2} は安定でなくてはならない。ここで、* は適当な行列である (以下同様)。また、逆に、(31) 式が安定化解 $X_2 \geq 0$ を持つとき、(30) 式を満たす $X \geq 0$ は (8) 式の疑似安定化解である。

なお、(31) 式が安定化解 $X_2 \geq 0$ を持つとき

$$A_2 - B_{22} E_{12}^{-1} B_{22}^T X_2 \quad (34)$$

も安定である²⁾。そこで

$$\alpha = -E_{12}^{-1} B_2^T X \quad (35)$$

とおくと、(15) 式中の F_∞ は (24) 式と定理 2 を満たす F の一つとなる。なぜならば、

$$T^{-1}(A + B_2 F_\infty) T = \begin{bmatrix} A_w & A_w2 - B_{21} E_{12}^{-1} B_{22}^T X_2 \\ 0 & A_2 - B_{22} E_{12}^{-1} B_{22}^T X_2 \end{bmatrix} \quad (36)$$

において、 $\lambda_i(A_w)$ 以外は安定となるからである。

また、双対として、(20) 式の U の補助基底として U_1 を

$$U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U \end{bmatrix} \quad (37)$$

が正則になるように選ぶと

$$S(A - B_1 D_{21}^{\dagger} C_2) S^{-1} = \begin{bmatrix} A_1 & A_{1z} \\ 0 & A_z \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$S B_1 D_{12}^{\dagger} = \begin{bmatrix} \delta \\ 0 \end{bmatrix}$$

の形式におけるので、これに合わせて次式のようにおく。

$$C_1 S^{-1} = (C_{11}, C_{12}), \quad C_2 S^{-1} = (C_{21}, C_{22}) \quad (39)$$

すると、仮定 $B1'$, $B2'$ から、 (A_1, C_{21}) は可検出、 (A_1, δ) 虚軸上で可制御となる。

一方、 $UY = 0$ の条件から疑似安定化解は

$$S Y S^T = \text{diag}(Y_1, 0) \geq 0 \quad (40)$$

の形式を満たさなければならない。そこで、(10) 式に S , S^T を左右からかけたものに (40) 式を代入すると、その唯一非零の第 (1,1) ブロックは

$$Y_2 A_1^T + A_1 Y_1 + Y_1 (C_{11}^T C_{11} - C_{21}^T E_{21}^{-1} C_{21}) Y_1 + \delta \delta^T = 0 \quad (41)$$

となる。すると、以上の双対として、(10) 式が疑似安定化解 $Y \geq 0$ を持つとき、(41) 式は安定化解 $Y_1 \geq 0$ を持ち、逆に、(41) 式が安定化解 $Y_1 \geq 0$ を持つと、(40) 式を満たす $Y \geq 0$ は (10) 式の疑似安定化解となる。

なお、(41) 式が安定化解 $Y_1 \geq 0$ を持つとき、

$$A_1 - C_{21}^T E_{21}^{-1} C_{21} \quad (42)$$

も安定なので、上の双対として、

$$\beta = -Y C_2^T E_{21}^{-1} \quad (43)$$

ととれば、(15) 式中の L_∞ が (25) 式と定理 2 を満たす H の一つとなる事が分かる。

4. 定理 3 の必要性の証明

総合安定を経由して定理 3 の必要条件の証明を行う。

ただし、以下の 2 章では記述の簡単化を狙って

$$E_{12} = D_{12}^T D_{12} = I, \quad E_{21} = D_{21} D_{21}^T = I \quad (44)$$

を仮定する。同様に、(27)式、(37)式において、 T 、 S が直交行列($T^{-1} = T^T$, $S^{-1} = S^T$)で

$$\begin{aligned} T^T T &= \begin{bmatrix} V^T \\ V_2^T \end{bmatrix} (V, V_2) = I \\ SS^T &= \begin{bmatrix} U_1 \\ U \end{bmatrix} (U_1^T, U^T) = I \end{aligned} \quad (45)$$

を満たすように、 V 、 U の大きさとその補空間の基底を選んでいるものとする。このように制御対象に対する座標変換を変えても、疑似安定化解の唯一性から結論は変わらない。

ステップ1

総合安定化された(26)式から不可観測な A_w 、不可制御な A_z を除き、残された系に制御器を Q と考えた標準 H_∞ 制御を適用し、(8)式が疑似安定化解 $X \geq 0$ を持たなくてはならないことを示す。

G の総合安定を達成する(24)式の F は

$$\alpha(V, V_2) = (0, F_2) \quad (46)$$

の形式を満たすので、(27)式~(29)式の正準形式のもとで

$$\begin{aligned} T^T(A + B_2 F)T &= \begin{bmatrix} A_w & A_w 2 + B_{21} F_2 \\ 0 & A_2 + B_{22} F_2 \end{bmatrix} \\ (C_1 + D_{12} F)T &= (0, C_{F_2}) \\ C_{F_2} &:= (D_{12}^\perp)^T \gamma + D_{12} F_2 \end{aligned} \quad (47)$$

とおける。ただし、定理2から $A_2 + B_{22} F_2$ は安定でなくてはならない。

次に、 G の総合安定を達成する(25)式の H において

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U \end{bmatrix} \beta = \begin{bmatrix} H_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (48)$$

の形式を得るので、(37)式~(39)式のもとで

$$\begin{aligned} S(A + H C_2)S^T &= \begin{bmatrix} A_1 + H_1 C_{21} & A_{1z} + H_1 C_{22} \\ 0 & A_z \end{bmatrix} \\ S(B_1 + H D_{21}) &= \begin{bmatrix} B_{H_1} \\ 0 \end{bmatrix} \\ B_{H_1} &:= \delta(D_{21}^\perp)^T + H_1 D_{21} \end{aligned} \quad (49)$$

となる。また、 $A_1 + H_1 C_{21}$ は定理2から安定である。

以上の準備のもとに、(26)式の G^Q に

$$\text{diag}(T, S^T) \quad (50)$$

で表わされる相似変換を行えば

$$G^Q = \begin{bmatrix} A_w & * & * & * \\ 0 & A_2 + B_{22} F_2 & -B_{22} F U_1^T & * \\ 0 & 0 & A_1 + H_1 C_{21} & * \\ 0 & 0 & 0 & A_z \\ \hline 0 & C_{F_2} & -D_{12} F U_1^T & * \\ 0 & 0 & -C_{21} & -C_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{21} \\ B_{12} & B_{22} \\ B_{H_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline 0 & D_{12} \\ -D_{21} & 0 \end{bmatrix}$$

となる。本式から不可観測、不可制御な不安定部分を取り除けば次式を得る。

$$G^Q = \begin{bmatrix} A_2 + B_{22} F_2 & -B_{22} F U_1^T & B_{12} & B_{22} \\ 0 & A_1 + H_1 C_{21} & B_{H_1} & 0 \\ \hline C_{F_2} & -D_{12} F U_1^T & 0 & D_{12} \\ 0 & -C_{21} & -D_{21} & 0 \end{bmatrix} \quad (51)$$

一方、 (A_2, γ) は虚軸上で可観測、 (A_2, B_{22}) は可安定、 $A_1 + H_1 C_{21}$ は安定、の3つの条件から、(51)式の G^Q は仮定A1)、A2)を満たしていることが分かる。よって、 $G_{zw} = F_l(G_Q, Q) \in BH_\infty$ となるためには、標準問題の(8)式に対応するリカッチ方程式が安定化解を持たなくてはならない。この解を X^Q とにおいてリカッチ方程式を求めると

$$\begin{aligned} X^Q &\begin{bmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & A_1 + H_1 C_{21} \end{bmatrix} + \text{第1項の転置} \\ + X^Q &\begin{bmatrix} B_{12} \\ B_{H_1} \end{bmatrix} (B_{12}^T, B_{H_1}^T) - \begin{bmatrix} B_{22} \\ 0 \end{bmatrix} (B_{22}^T, 0) X^Q \\ + \begin{bmatrix} \gamma \\ 0 \end{bmatrix} &(\gamma^T, 0) = 0 \end{aligned} \quad (52)$$

となる。 $A_1 + H_1 C_{21}$ は安定で、本式において

$$\begin{bmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & A_1 + H_1 C_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} (A_1 + H_1 C_{21})$$

$$(\gamma^T, 0) \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} = 0$$

が成り立つので、付録1から、非負の安定化解が存在すれば

$$X^Q = \text{diag}(X_2, 0) \geq 0 \quad (53)$$

の形式とならなくてはならない。ここで、 $X_2 \geq 0$ は(31)式の解であり、同式の安定化解でなくてはならない。このとき(30)式から

$$X = T \text{diag}(0, X_2) T^T = V_2 X_2 V_2^T \geq 0 \quad (54)$$

が(8)式の疑似安定化解となる。なお、 $V_2^T V_2 = I$ から次の関係式も成り立つ。

$$V_2^T X = X_2 V_2^T, \quad V_2^T X V_2 = X_2 \quad (55)$$

ステップ2

ここでは、疑似安定化解 $Y \geq 0$ の存在と $\rho(XY) < 1$ が必要なことを述べる。

まず、(47)式から

$$\begin{aligned} V_2^T(A + B_2F) &= (A_2 + B_{22}F_2)V_2^T \\ C_1 + D_{12}F &= C_{F_2}V_2^T \end{aligned}$$

を得、(29)式において

$$\begin{bmatrix} V^T \\ V_2^T \end{bmatrix} B_1 = \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{12} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} V^T \\ V_2^T \end{bmatrix} B_2 = \begin{bmatrix} B_{21} \\ B_{22} \end{bmatrix}$$

が成り立つ。同様に、双対として、(49)式から

$$\begin{aligned} (A + HC_2)U_1^T &= U_1^T(A_1 + H_1C_{21}) \\ B_1 + HD_{21} &= U_1^T B_{H_1} \end{aligned}$$

を得、(39)式において次式が成り立つ。

$$C_1(U_1^T, U^T) = (C_{11}, C_{12}), \quad C_2(U_1^T, U^T) = (C_{21}, C_{22})$$

そこで、以上に注目して

$$T^Q := \begin{bmatrix} I & V_2^T U_1^T \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (56)$$

の相似変換を(51)式に施すと、

$$\begin{aligned} &(A_2 + B_{22}F_2)V_2^T U_1^T - B_{22}F U_1^T \\ &\quad - V_2^T U_1^T (A_1 + H_1C_{21}) \\ &= V_2^T (A + B_2F)U_1^T - B_{22}F U_1^T \\ &\quad - V_2^T (A + HC_2)U_1^T \\ &= -V_2^T HC_2 U_1^T \end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned} &B_{12} - V_2^T U_1^T B_{H_1} \\ &= V_2^T B_1 - V_2^T (B_1 + HD_{21}) = -V_2^T HD_{21} \\ &C_{F_2} V_2^T U_1^T - D_{12} F U_1^T \\ &= (C_1 + D_{12}F)U_1^T - D_{12} F U_1^T = C_1 U_1^T \end{aligned}$$

などの計算から、 G^Q の別の表現として

$$G^Q = \begin{bmatrix} A_2 + B_{22}F_2 & -V_2^T HC_2 U_1^T & -V_2^T HD_{21} & B_{22} \\ 0 & A_1 + H_1C_{21} & B_{H_1} & 0 \\ \hline C_{F_2} & C_1 U_1^T & 0 & D_{12} \\ 0 & -C_{21} & -D_{21} & 0 \end{bmatrix} \quad (57)$$

が成り立つことが確かめられる。

一方、 (A_1, δ) は虚軸上で可制御、 (A_1, C_{21}) は可検出、 $A_2 + B_{22}F_2$ は安定、の3つの条件から、 G^Q は仮定B1)、B2)を満たしていることも確かめられる。よって、この G^Q に対して H_∞ 制御問題が解けるためには(10)式に対応するリカッチ方程式が安定化解を持たなくてはならない。この解を \tilde{Y}^Q とすると

$$\begin{aligned} &\text{第2項の転置} + \begin{bmatrix} A_2 + B_{22}F_2 & 0 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix} \tilde{Y}^Q \\ &+ \tilde{Y}^Q \begin{bmatrix} C_{F_2}^T \\ U_1 C_1^T \end{bmatrix} (C_{F_2}, C_1 U_1^T) - \begin{bmatrix} 0 \\ C_{21}^T \end{bmatrix} (0, C_{21}) \tilde{Y}^Q \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \delta \delta^T \end{bmatrix} = 0 \end{aligned}$$

となり、 $A_2 + B_{22}F_2$ の安定性から、付録1の双対として、安定化解は

$$\tilde{Y}^Q = \text{diag}(0, Y_1) \geq 0 \quad (58)$$

の形式となり、しかも、 $Y_1 \geq 0$ は(41)式を満たし、その安定化解でなくてはならない。このとき、(40)式から

$$Y = S^T \text{diag}(Y_1, 0) S = U_1^T Y_1 U_1 \geq 0 \quad (59)$$

は(10)式の擬似安定化解となる。さらに、 $U_1 U_1^T = I$ から

$$Y U_1^T = U_1^T Y_1, \quad U_1 Y U_1^T = Y_1 \quad (60)$$

が成り立つ。

一方、(56)式の相似変換を施す前の座標系(X^Q と同じ座標系)では、

$$\begin{aligned} Y^Q &= T^Q \tilde{Y}^Q T^{Q^T} \\ &= \begin{bmatrix} V_2^T U_1^T Y_1 U_1 V_2 & V_2^T U_1^T Y_1 \\ Y_1 U_1 V_2 & Y_1 \\ \hline V_2^T Y V_2 & V_2^T Y U_1^T \\ U_1 Y V_2 & U_1 Y U_1^T \end{bmatrix} \quad (61) \end{aligned}$$

となる。よって

$$Y^Q X^Q = \begin{bmatrix} V_2^T Y V_2 X_2 & 0 \\ U_1 Y V_2 X_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (62)$$

を得、標準 H_∞ 制御のもう一つの条件から次式となる。

$$\begin{aligned} \rho(Y^Q X^Q) &= \rho(V_2^T Y V_2 X_2) \\ &= \rho(Y V_2 X_2 V_2^T) = \rho(Y X) < 1 \end{aligned} \quad (63)$$

5. 定理3の十分条件の証明

前章の続きとして、定理1から(51)式の G^Q に対する標準 H_∞ 制御器 Q を求めると、次の形式となる。

$$Q_\infty = F_l(R^\infty, N) \quad : N \in BH_\infty \quad (64)$$

一方、一般に $K = F_l(M, Q)$ において、 K から Q を逆算すると

$$Q = F_l(JM^{-1}J, K) \quad : J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix} \quad (65)$$

となる⁸⁾。そこで、(13)式の K_∞ の Q 表現を求めると、 K_∞ を本式の K に代入すると、

$$Q_\infty = F_l(JM^{-1}J * M^\infty, N) \quad (66)$$

となる。よって

$$R^\infty = JM^{-1}J * M^\infty \quad (67)$$

が示せば、定理3で示した(13)式の制御器は拡張 H_∞ 制御器であることが分かる。ただし、 $N \in BH_\infty$ の符号は自由なので、(67)式において、 $(R_{21}^\infty, R_{22}^\infty)$ の符号は右辺と比して反転していても良い。

ステップ1

R^∞ を求めよう。まず、総合安定化を達成する F, H として3.3節で示したように

$$\begin{aligned} F &= F_\infty : \text{ or } F_2 = -B_{22}^T X_2 \\ H &= L_\infty : \text{ or } H_1 = -Y_1 C_{21}^T \end{aligned} \quad (68)$$

と選べる。以下、 F 、 H をそのように選んだとし、 F_∞ 、 L_∞ を F 、 H と同一とみなす。また、

$$\begin{aligned} B_{H_1} &= U_1(B_1 + L_\infty D_{21}) \\ C_{F_2} &= (C_1 + D_{12} F_\infty) V_2 \end{aligned} \quad (69)$$

に注意する。

そして、前章の続きとして(51)式の G^Q を一般化プラントと考え、定理1を適用し、(15)式中の各係数に添字 Q を付して表すと

$$\begin{aligned} F_\infty^Q &= (0, F_\infty U_1^T), \quad L_\infty^Q = \begin{bmatrix} -V_2^T L_\infty \\ 0 \end{bmatrix} \\ \hat{C}_2^Q &= (-D_{21} B_1^T X V_2, -C_2 U_1^T) \\ \hat{B}_2^Q &= \begin{bmatrix} V_2^T \hat{B}_2 \\ U_1 Y C_1^T D_{12} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (70)$$

となる。ただし、 $XV = 0$ 、 $UY = 0$ 、その転置、および、(45)式より得られる

$$\begin{aligned} V_2 V_2^T X &= (I - V V^T) X = X \\ Y U_1^T U_1 &= Y(I - U^T U) = Y \end{aligned} \quad (71)$$

を適用し、各係数を次元縮小前のものを使って整理した。

さらに

$$\begin{aligned} Z^Q &= (I - Y^Q X^Q)^{-1} := \begin{bmatrix} Z_1 & 0 \\ Z_{21} & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (I - V_2^T Y V_2 X_2)^{-1} & 0 \\ U_1 Y V_2 X_2 (I - V_2^T Y V_2 X_2)^{-1} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (72)$$

を得るが、 $V_2^T V_2 = I$ と

$$\begin{aligned} Z &= (I - YX)^{-1} = I + Y(I - XY)^{-1} X \\ &= I + YX(I - YX)^{-1} = I + YXZ \end{aligned} \quad (73)$$

から

$$\begin{aligned} Z_1 &= Z_1 V_2^T V_2 = V_2^T (I - Y V_2 X_2 V_2^T)^{-1} V_2 \\ &= V_2^T (I - YX)^{-1} V_2 = V_2^T Z V_2 \\ Z_{21} &= Z_{21} V_2^T V_2 = U_1 Y V_2 X_2 V_2^T Z V_2 \\ &= U_1 Y X Z V_2 = U_1 (Z - I) V_2 \end{aligned}$$

が成り立つ。

よって

$$\begin{aligned} \hat{A}^Q &= \begin{bmatrix} V_2^T (A + B_2 F_\infty) V_2 & -V_2^T B_2 F U_1^T \\ 0 & U_1 (A + L_\infty C_2) U_1^T \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} V_2^T B_1 \\ U_1 (B_1 + L_\infty D_{21}) \end{bmatrix} (B_1^T V_2, *) \begin{bmatrix} V_2^T X V_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} V_2^T B_2 \\ 0 \end{bmatrix} (0, F_\infty U_1^T) \\ &+ \begin{bmatrix} V_2^T Z V_2 & 0 \\ U_1 (Z - I) V_2 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2^T L_\infty \\ 0 \end{bmatrix} (D_{21} B_1^T X V_2, C_2 U_1^T) \end{aligned} \quad (74)$$

を得るが、(71)式、(73)式を使って得られる

$$\begin{aligned} V_2^T Z V_2 V_2^T &= V_2^T Z \\ U_1 (Z - I) V_2 V_2^T &= U_1 (Z - I) \end{aligned} \quad (75)$$

を使って整理すると、 R^∞ として次式を得る。

$$\begin{aligned} R^\infty &= \left[\begin{array}{c|c} \begin{array}{c} V_2^T (A_X + Z L_\infty D_{21} B_1^T X) V_2 \\ U_1 (B_1 + Z L_\infty D_{21}) B_1^T X V_2 \\ 0 \\ D_{21} B_1^T X V_2 \\ V_2^T Z L_\infty C_2 U_1^T \\ U_1 (A + Z L_\infty C_2) U_1^T \\ F_\infty U_1^T \\ C_2 U_1^T \end{array} & \begin{array}{c} Z L_\infty C_2 \\ A + Z L_\infty C_2 \\ F_\infty \\ C_2 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cc} V_2^T Z L_\infty & V_2^T Z \hat{B}_2 \\ U_1 (Z - I) L_\infty & U_1 (Z \hat{B}_2 - B_2) \\ 0 & I \\ I & 0 \end{array} & \end{array} \right] \quad (76) \end{aligned}$$

ステップ2

$JM^{-1}J * M^\infty$ を求め、 R^∞ と一致することを示す。まず、 $F = F_\infty$ 、 $H = L_\infty$ とおくと

$$JM^{-1}J = \left[\begin{array}{c|cc} A & L_\infty & B_2 \\ \hline -F_\infty & 0 & I \\ C_2 & -I & 0 \end{array} \right] \quad (77)$$

を得るので

$$\begin{aligned} JM^{-1}J * M^\infty &= \left[\begin{array}{cc|cc} A & B_2 F_\infty & L_\infty & B_2 \\ -Z L_\infty C_2 & \hat{A} & Z L_\infty & Z \hat{B}_2 \\ \hline -F_\infty & F_\infty & 0 & I \\ C_2 & -\hat{C}_2 & -I & 0 \end{array} \right] \quad (78) \end{aligned}$$

となる。次に

$$\left[\begin{array}{c|c} I & -I \\ \hline I & 0 \end{array} \right] \quad (79)$$

の相似変換を施すと次式となる。

$$\left[\begin{array}{cc|cc} A_X + Z L_\infty D_{21} B_1^T X & Z L_\infty C_2 & & \\ (B_1 + Z L_\infty D_{21}) B_1^T X & A + Z L_\infty C_2 & & \\ \hline 0 & F_\infty & & \\ -D_{21} B_1^T X & -C_2 & & \\ \hline Z L_\infty & Z \hat{B}_2 & & \\ (Z - I) L_\infty & Z \hat{B}_2 - B_2 & & \\ \hline 0 & I & & \\ -I & 0 & & \end{array} \right]$$

最後に、(73)式から $UZ = U$ 、 $UL_\infty = -UB_1 D_{21}^\dagger$ と、

$$\begin{aligned} U(Z \hat{B}_2 - B_2) &= 0 \\ U(B_1 + Z L_\infty D_{21}) &= UB_1 D_{21}^\dagger (D_{21}^\dagger)^T = 0 \\ U(A + Z L_\infty C_2) U^T &= 0 \\ &= U(A - B_1 D_{21}^\dagger C_2) U^T = A_z \end{aligned} \quad (80)$$

が成り立つことと、 $B_1^T X V = 0$ を使って、 $\text{diag}(T, S^T)$ の相似変換を施すと

$$JM^{-1}J^*M^\infty = \left[\begin{array}{cc|cc} A_w & * & & \\ 0 & V_2^T(A_X + ZL_\infty D_{21}B_1^T X)V_2 & & \\ 0 & U_1(B_1 + ZL_\infty D_{21})B_1^T X V_2 & & \\ \hline 0 & 0 & & \\ 0 & -D_{21}B_1^T X V_2 & & \\ \hline & * & * & \\ & V_2^T ZL_\infty C_2 U_1^T & * & \\ & U_1(A + ZL_\infty C_2)U_1^T & * & \\ & 0 & A_z & \\ \hline & F_\infty U_1^T & * & \\ & -C_2 U_1^T & * & \\ \hline & * & * & \\ & V_2^T ZL_\infty & V_2^T Z\hat{B}_2 & \\ & U_1(Z - I)L_\infty & U_1(Z\hat{B}_2 - B_2) & \\ \hline & 0 & 0 & \\ & 0 & I & \\ & -I & 0 & \end{array} \right]$$

となり、不可観測な A_w 、不可制御な A_z を消去すれば、 $R_{21}^\infty, R_{22}^\infty$ の符号(最後の行)を除いて(76)式の R^∞ と一致する。

6. H_∞ サーボ問題と H_∞ 推定問題

6.1 H_∞ サーボ系の設計

定理 2 の続きとして、以下が知られている⁶⁾。

[系 1] (総合安定化器の極)

1. 仮定 A1'), B1'), C1') の下で、(18)式、(19)式の上に

$$C_2 V = 0 \quad (81)$$

が成り立つと、総合安定化器は全ての $Q \in RH_\infty$ に対して $\lambda_i(A_w)$ を極として持つ。

2. 仮定 A1'), B1'), C1') の下で、(20)式、(21)式の上に

$$U B_2 = 0 \quad (82)$$

が成り立つと、総合安定化器は全ての $Q \in RH_\infty$ に対して $\lambda_i(A_z)$ を極として持つ。

3. 2ブロック混合感度問題において、感度関数の重みが不安定極を持つ場合、入力端混合感度問題では第1項、出力端混合感度問題では第2項が成り立つ。■

一方、(76)式の R^∞ から求まる(64)式の Q_∞ はすべての $N \in BH_\infty$ に対して安定である。なぜならば、(51)式の G^Q は仮定 A1), A2), B1), B2) を満たすので、この Q は(51)式に対する標準 H_∞ 制御器であり、(51)式を内部安定にしないとはならない。ところが、 $G_{22}^Q = 0$ から

$$G_{zw} = F_i(G^Q, Q_\infty) = G_{11}^Q + G_{12}^Q Q_\infty G_{21}^Q \quad (83)$$

が成り立つので、内部安定にする制御器 Q^∞ も安定である。

よって、拡張 H_∞ 制御器 K_∞ はすべての $N \in BH_\infty$ に対して総合安定化器でもある。これから、系 1 の第1項、あ

るいは、第2項が成り立ち、かつ、定理 3 が成り立つとき、拡張 H_∞ 制御器は重みの不安定極をその極とする。よって、 $W_w(s)$ 、あるいは、 $W_z(s)$ を目標値、あるいは、外乱のモデルとして選べば、内部モデル原理が成り立つ。通常の使い方では第3項から混合感度問題で感度関数の重みにそのようなモデルを含ませてやれば良いことが分かる。特に、この場合、 $\lambda_i(A_w)$ 、あるいは、 $\lambda_i(A_z)$ は $j\omega$ 極として選ばれる^{4), 2)}。

なお、総合安定化器が重みの不安定極をその極として持つための必要十分条件は未だ得られていない。

6.2 H_∞ 推定問題

H_∞ 推定問題は制御対象が不安定なときには、標準 H_∞ 制御解から直接導出できなかった^{9), 10)}。これは、推定問題においては制御対象が重みとして定式化されるからである。これに対して、文献¹²⁾では推定器のパラメトリゼーション¹¹⁾を用いてこれを回避している。ここでは、推定器のパラメトリゼーションを経由せず H_∞ 制御を直接使用し、この問題を回避する。実際、同文献にある推定器のパラメトリゼーションは総合安定化器のその特殊な場合であることを示すことができる。

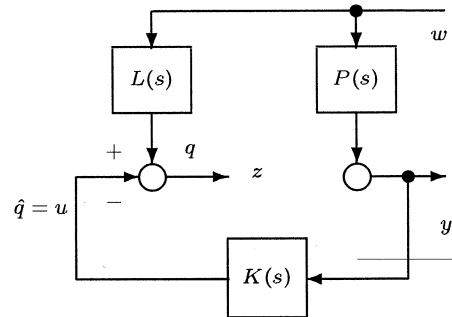


Fig. 2 H_∞ 推定問題

今、図2のように、 w を制御対象 $P(s)$ に加わる外乱とし、観測出力が

$$y = P(s)w = [C_2(sI - A)^{-1}B_1 + D_{21}]w \quad (84)$$

と記述できるとする。また、推定したい出力を

$$q = L(s)w = [C_1(sI - A)^{-1}B_1]w \quad (85)$$

とし、安定推定器を $K(s)$ を使って、 q の推定値を

$$\hat{q} = K(s)y \quad (86)$$

のように発生することを考える。このとき、推定誤差を $z = q - \hat{q}$ とおくと、基本的な H_∞ 推定問題⁹⁾は

$$\sup_w \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2} < \gamma \quad (87)$$

と定式化される。ただし、以下、 $\gamma = 1$ とする。

この問題は H_∞ 制御問題において一般化プラントを

$$G(s) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} A & B_1 & 0 & & & \\ \hline C_1 & 0 & -I & & & \\ \hline C_2 & D_{21} & 0 & & & \end{array} \right] \quad (88)$$

とした問題に一致する。ただし、 D_{21} は行フルランクであり、仮定B1)、B2)が成り立つとする。

図2を図1と比較すると、この問題は $G_{22} = 0$ で

$$W_w(s) = \begin{bmatrix} L(s) \\ P(s) \end{bmatrix}, \quad W_z = I \quad (89)$$

なる重みを持つ H_∞ 制御となる。

よって、 A の固有値は全て入力重み W_w の極となり、 A のすべての不安定固有値から A_w が構成され、ある列フルランクな T_w に対して次式が成り立つ。

$$AT_w = T_w A_w \quad (90)$$

今、 $B_2 = 0$ なので仮定A1')が成り立つ。また、 $B_2 = 0$ と $D_{12}^\dagger = 0$ から、 $V = T_w$ とおけば、(18)式、(19)式が成り立つ。さらに、 A_w は A の不安定固有値全体からできていたので、仮定A2')が成り立つ。出力重みはないのでC1')が成り立ち、B1')、B2')はB1)、B2)となる。

よって、定理3が使えるが、(8)式において、疑似安定化解は $X = 0$ となる。これは、 $X = 0$ が(8)式を満たし、かつ、 $A_X = A$ の固有値は $\lambda_i(A_w)$ 以外安定であるからである。

よって、可解条件は(10)式が安定化解 $Y \geq 0$ を持つことに等しいことが分かる。このとき、 H_∞ 推定器は(13)式から

$$K_\infty(s) = F_1(M^{est}(s), N(s)) \quad (91)$$

となる。ただし、

$$M^{est}(s) = \begin{bmatrix} \hat{A} & -L_\infty & -YC_1^T \\ C_1 & 0 & I \\ -E_{21}^{-1/2}C_2 & E_{21}^{-1/2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A} = A - B_1 D_{21}^\dagger C_2 - Y C_2^T E_{21}^{-1} C_2$$

7. おわりに

不安定重みを持つ系に対する拡張 H_∞ 制御問題を扱った。本論文の応用範囲は広いと考えられる。

紙面の都合で示せなかったが、重みの不安定極が拡張 H_∞ 制御器の零点となる条件や応用については別途報告する。

参考文献

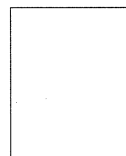
- 1) J. C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar and B. A. Francis: State Space Solutions to Standard H_2 and H_∞ Control Problems, *IEEE Trans. on AC*, **34-8**, 831-847, 1989.
- 2) 美多 勉: H_∞ 制御, 昭晃堂, 1994
- 3) K.Z.Liu and T. Mita, Generalized H_∞ Control Theory, Proc. of ACC, 2245-2249, 1992
- 4) 美多、劉、栗山: 虚軸上に極を持つ重みを許す H_∞ 制御系の設計, *SICE論文集*, **29-11**, 1320-1329, 1993
- 5) K. Kuriyama, B.D.O. Anderson and T. Mita, A Complete Solution to H_∞ Control Problems with Infinite Gain Weightings, Proc. of ECC'95, 183-188, 1995
- 6) 美多、劉、富山、張: 不安定重みを有する拡張制御器の構造と拡張 H_2 制御, *SICE論文集*, 投稿中, DST96で発表, 1996.
- 7) 劉、美多: 総合安定化器のパラメトリゼーションと構造, *SICE論文集*, **32-3**, 320-328, 1996.
- 8) 美多、張: 既約分解を用いないユラパラメトリゼーションの証

明法, *SICE論文集*, **31-4**, 540-541, 1995.

- 9) K.M. Nagpal, P.P. Khargonekar: Filtering and Smoothing in an H_∞ Setting, *IEEE Trans. on AC*, **36-2**, 152-166, 1991.
- 10) M. Fu: Interpolation approach to H_∞ estimation and its interconnection to loop transfer recovery, *System & Control Lett.*, **17**, 29-36, 1991.
- 11) G.C. Goodwin and R.H. Middleton: The class of all stable unbiased state estimators, *System & Control Lett.*, **13**, 161-163, 1989.
- 12) P. P. Khargonekar, M. Rotea and E. Baeyens: Mixed H_2/H_∞ Filtering, *Int. J. Roust & Nonllin. Cont.*, **6**, 313-330, 1996.

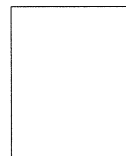
[著者紹介]

美多 勉 (正会員)



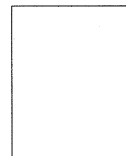
1975年東京工業大学大学院理工学研究科博士課程(電気工学専攻)修了, 同年千葉大学講師、90年同教授を経て、95年東京工業大学工学部制御システム工学科教授。制御理論、ロボット工学等の教育研究に従事。(工学博士)

忻 欣 (正会員)



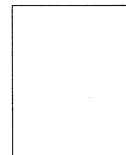
1992年大阪大学大学院博士課程留学、94年中国東南大学博士課程修了。95年東南大学助教。96年4月NEDOの派遣研究員として東京工業大学に勤務。(J, J')スペクトル分解、ロバスト制御のロボットへの応用等の研究に従事。(工学博士)

富山 仁博 (学生会員)



1996年東京工業大学工学部制御システム工学科卒業、現在同大学院理工学研究科修士課程(制御工学専攻)に在学。ロバスト制御理論とその展開に興味を持つ。

Brian D.O. ANDERSON



He recieved his Ph.D degree from Stanford Univ. in '66. He has been a Professor of Australarian National Univ. since '81. He had been the president of IFAC for three years since '90. His interests are in control theory.

付録1

$AT = TA_{sub}$, $CT = 0$ が成り立ち、 A_{sub} が安定のとき、

$$XA + A^T X + XRX + C^T C = 0 \quad (A1)$$

の安定化解は $XT = 0$ を満たす。証明としては、本式を整理し、右から T をかけると

$$XTA_{sub} + (A + RX)^T XT = 0 \quad (A2)$$

を得、 A_{sub} と $A_X = A + RX$ の安定性から $XT = 0$ を得る。