

# $H_\infty$ -Optimierung abgetasteter Regelsysteme

$H_\infty$ -optimization of sampled data systems

Jürg Peter Keller, Basel, und Brian David O. Anderson, Canberra



Dr.-Ing. Jürg Peter Keller ist Sachbearbeiter in der Abteilung für Automatisierungstechnik der Hoffman-La Roche AG, Basel. Hauptarbeitsfelder: Entwurf digitaler Regler und Modellanalyse, insbesondere Modellreduktion und Auswahl der Steuer- und Meßgrößen.



Prof. Brian David O. Anderson ist Professor am Department of Systems Engineering der Australian National University. Hauptarbeitsfelder: Automatik, Signalverarbeitung.

Adresse: Australian National University, Department of Systems Engineering, GPO Box 4, Canberra ACT 2601, Australien, Tel. +61-6-249-2461.

Enthält ein System sowohl zeitkontinuierliche als auch zeitdiskrete Teile, so kann dessen zeitkontinuierliches Verhalten im allgemeinen nur sehr umständlich optimiert werden. In diesem Beitrag wird eine neue Methode vorgeschlagen, die eine einfache Optimierung solcher Systeme erlaubt. Die Methode beruht auf einer beliebig genauen Approximation des ursprünglichen Systems durch ein rein zeitdiskretes, periodisches System. Die Ein- und Ausgangsvariablen des periodischen Systems können dann ohne Veränderung des Gütekriteriums so umgeordnet werden, daß das periodische System durch eine zeitinvariante Übertragungsfunktion beschrieben werden kann. Man erhält somit eine Standard- $H_\infty$ -Optimierungsaufgabe, die mit bekannten Methoden (und kommerzieller Software) gelöst werden kann.

Mit Hilfe der vorgeschlagenen Optimierungsmethode wird ein neues Verfahren zur Diskretisierung zeitkontinuierlicher Regler hergeleitet. Für das resultierende, abgetastete Regelsystem kann Stabilität garantiert werden. Im weiteren wird gezeigt, wie mit der Optimierungsmethode zeitdiskrete Regler bezüglich zeitkontinuierlicher  $H_\infty$ -Gütespezifikationen direkt optimiert werden können. Beide Anwendungen zeigen, wie durch die vorgeschlagene Methodik das zeitkontinuierliche Verhalten von Systemen mit zeitkontinuierlichen und zeitdiskreten Teilen optimiert werden kann.

*If a system contains both continuous-time and discrete-time parts, known methods for its optimization can only treat its continuous-time behaviour in a very indirect manner. In this paper a new method is presented which allows straightforward optimization of such systems. The method relies on using an approximation of the original system (with arbitrarily small error) by a purely discrete-time, periodic system. By a reordering of variables which does not affect the performance index, the periodic system can be described with a time-invariant transfer function, and the optimization problem solved with the use of conventional  $H_\infty$  optimization, employing well known methods and commercially available software.*

*The optimization method presented is used to derive a new technique for discretization of a continuous-time controller. Stability of the resulting closed-loop can be guaranteed. A second application is a scheme for the direct design of a discrete-time controller given a continuous-time  $H_\infty$  performance index. Both applications of the method illustrate how the continuous-time behaviour of such mixed (i.e. continuous-time and discrete-time) systems can be optimized.*

## 1 Einleitung

Immer häufiger werden Regler mit Hilfe von Computern realisiert. Digitale Rechenanlagen ermöglichen jedoch nur die Realisierung zeitdiskreter Regler. Verschiedene Methoden für den Entwurf zeitdiskreter Regler wurden vorgeschlagen und in Lehrbüchern (z. B. Ackermann [1], Franklin & Powell [8]) zusammengefaßt. Die meisten dieser Entwurfsmethoden optimieren das zeitdiskrete Verhalten des geregelten Systems. Es ist klar, daß dadurch das in der Praxis relevante, zeitkontinuierliche Verhalten (d. h. auch das Verhalten zwischen den Abtastzeitpunkten) im allgemeinen nur ungenügend berücksichtigt wird. Um mit diesen Methoden trotzdem ein annehmbares Verhalten des Regelsystems zu erreichen, muß die Abtastzeit genügend klein gewählt werden. Unnötig kleine Abtastperioden führen aber oft zu numerischen Problemen und verursachen wegen des großen Aufwandes für Datenübertragung, Speicherung und Berechnungen große Reglerimplementierungskosten. Im weiteren verlangen Regelsysteme mit kurzen Abtastzeiten auch entsprechend schnelle Stellglieder, falls man deren Dynamik nicht mit zusätzlichem Aufwand im Modell berücksichti-

gen will. Dies begründet die Notwendigkeit von Entwurfsmethoden, die auch das Verhalten des Regelkreises zwischen den Abtastzeitpunkten in die Regleroptimierung einschließen und dadurch die Verwendung größerer Abtastzeiten erlauben.

Für den Reglerentwurf anhand quadratischer Gütekriterien wird z. B. in [1] oder [8] gezeigt, wie der zeitkontinuierliche Verlauf des Anlagenzustandes durch eine entsprechende Bestimmung der Gewichtungsmatrizen im Reglerentwurf berücksichtigt werden kann. In diesem Beitrag soll eine Methodik vorgestellt werden, die für den  $H_\infty$ -Reglerentwurf den Einbezug des Verhaltens zwischen den Abtastzeitpunkten ermöglicht. Das vorgeschlagene, allgemeine Prinzip läßt sich zur Lösung verschiedener Entwurfsprobleme anwenden, so zum Beispiel zur Reglerdiskretisierung oder zum direkten Entwurf eines zeitdiskreten Reglers anhand des zeitkontinuierlichen Anlagenmodells.

Bei der  $H_\infty$ -Optimierung abgetasteter Systeme stellt sich folgendes Problem:

Gegeben sei ein abgetastetes System  $J$  mit zeitkontinuierlichen Übertragungsfunktionen  $M_k$  und zeitdiskreten Übertragungsfunktionen  $M_d$ , die über Abtaster und Halteglieder miteinander verknüpft sind, d. h.  $J = J(M_k, M_d)$ . Die Menge  $M_d$  enthält den zu bestimmenden, zeitdiskreten Regler  $C_1$ . Gesucht ist nun derjenige Regler  $C_1$ , der die Norm von  $J$  minimiert:

$$C_1 = \arg \min \|J\|. \quad (1)$$

Die Lösung dieser Optimierungsaufgabe ist im allgemeinen nur sehr schwierig zu finden. Eine direkte Optimierung kann aber umgangen werden, wenn die zeitkontinuierlichen Teile durch zeitdiskrete mit beliebig kleiner Abtastzeit approximiert werden. Ist für die Bildung der Approximation eine nicht restriktive Bedingung erfüllt, so kann gezeigt werden, daß der Wert des  $H_\infty$ -Gütekriteriums der daraus resultierenden, zeitdiskreten Approximation gegen denjenigen des abgetasteten Systems strebt, falls die zusätzlich eingeführte Abtastzeit gegen Null strebt.

Das Approximationssystem enthält zwei Abtastzeiten, nämlich die größere des zu entwerfenden Reglers und die beliebig kleine des Approximationsschrittes. Wählt man die kleinere Abtastzeit als einen ganzzahligen Teiler  $N$  der gegebenen, größeren Abtastzeit, so erhält man ein  $N$ -periodisches System.  $N$ -periodische Systeme können durch Umordnen durch zeitinvariante Übertragungsfunktionen dargestellt werden, ohne daß sich dabei ein  $H_\infty$ -Gütekriterium verändert (Khargonekar et al. [11]). Man erhält somit ein Standard- $H_\infty$ -Optimierungsproblem, d. h. eine Optimierung der  $H_\infty$ -Norm einer zeitinvarianten Übertragungsfunktion. Die numerische Lösung kann mit Hilfe kommerzieller Software einfach bestimmt werden.

Die intuitiv einfach verständliche Approximationsidee wird im Abschnitt 2.2 bezüglich der Konvergenzeigenschaften untersucht. Konvergenzprobleme entstehen durch die folgende Eigenschaft der Abtastung: Es existieren Eingangsfunktionen mit endlicher quadratischer Norm, die nach der Abbildung durch einen Abtaster

(gefolgt von einem Halteglied) Ausgangssignale mit nicht endlicher quadratischer Norm (d. h. Energie) ergeben (Chen & Francis [3]). Da aber die Approximationsschritte das Einfügen von Abtastern beinhalten, bedarf es einer sorgfältigen Untersuchung der Konvergenzeigenschaften. Im Abschnitt 2.3 werden einige bekannte Tatsachen über die Darstellung zeitdiskreter, periodischer Systeme zusammengefaßt. Aus den Resultaten von Abschnitt 2 wird in Abschnitt 3 die Optimierungsmethode zusammengesetzt. Anwendungen des vorgeschlagenen Verfahrens werden im vierten Abschnitt gezeigt. Die erste Anwendung ist die Reglerdiskretisierung. Es wird eine neue Methode vorgeschlagen, welche die Verwendung des zeitdiskreten Reglers im geschlossenen Regelkreis mitberücksichtigt. Als Folge davon kann die Stabilität des Regelsystems garantiert werden. Falls nicht eine betreffend des Stabilitätskriteriums maximal mögliche Abtastzeit gewählt wird, so ist auch eine gute Regelgüte zu erwarten. Die zweite Anwendung ist ein Verfahren zum direkten Entwurf eines zeitdiskreten Reglers anhand eines zeitkontinuierlichen Gütekriteriums. Die beiden Reglerentwurfsprobleme werden im letzten Abschnitt für das  $H_\infty$ -Entwurfsbeispiel einer großen Weltraumantenne von Safonov et al. [13] gelöst.

## 2 Grundlagen der Optimierungsmethode

### 2.1 Notation

Zur Klarstellung der Notation soll zunächst die Verwendung einiger Symbole festgelegt werden:

$\mathcal{L}_2$ : Raum von zeitkontinuierlichen Funktionen mit  $u \in \mathcal{L}_2$  falls

$$\|u\|_2 \equiv \left\{ \int_0^\infty u'(t)u(t) dt \right\}^{\frac{1}{2}} < \infty \quad (2)$$

(d. h.  $u$  hat eine endliche Energie).

$l_2$ : Raum der zeitdiskreten Funktionen mit  $\hat{u} \in l_2$  falls

$$\|\hat{u}\|_2 \equiv \sqrt{\tau} \left\{ \sum_{k=1}^\infty \hat{u}'(k\tau)\hat{u}(k\tau) \right\}^{\frac{1}{2}} < \infty \quad (3)$$

(Man beachte die nicht übliche Skalierung der Norm mit  $\sqrt{\tau}$ .)

$H_\infty$ : Raum der komplexen Funktionen, die analytisch in der geschlossenen rechten Halbebene (im Komplement des offenen Einheitskreises) sind.

$RH_\infty$ : rationale Funktionen in  $H_\infty$ , d. h. stabile, rationale Übertragungsfunktionen.

$\|A\|$ :  $\mathcal{L}_2(l_2)$ -Norm induzierte Operatornorm von  $A$  (Verstärkung von  $A$ ):

$$\|A\| = \sup_{\|u\|_2 \neq 0} \frac{\|Au\|_2}{\|u\|_2}, \quad u, Au \in \mathcal{L}_2(l_2). \quad (4)$$

Periodische, zeitdiskrete Systeme enthalten im einfachsten Fall zwei verschiedene Abtastzeiten.  $\tau_1$  bezeichne die längere und  $\tau_s = \tau_1/N$  die kürzere Abtastzeit. Die zu  $\tau_1$  gehörenden Übertragungsfunktionen sind Funktion von

$z_1$ , z. B.  $G(z_1)$ , die zu  $\tau_s$  gehörenden werden mit „ $\hat{\cdot}$ “ gekennzeichnet und sind Funktionen von  $z_s$ , z. B.  $\hat{G}(z_s)$ . Umgeordnete Übertragungsfunktionen werden mit „ $\tilde{\cdot}$ “ gekennzeichnet.  $S_{\tau_s}$  ist das Zeichen für einen Abtaster mit Periode  $\tau_s$ ,  $H_{\tau_s}$  für ein Halteglied mit Haltezeit  $\tau_s$ .

Systeme werden als abgetastet bezeichnet, falls sowohl zeitkontinuierliche wie auch zeitdiskrete Abbildungen darin vorkommen, d. h. zum Beispiel eine Anlage mit digitalem Regler.

### 2.2 Approximation abgetasteter Systeme

Abgetastete Systeme, die außer Abtaster und Halteglieder nur aus zeitinvarianten Elementen bestehen, können durch zeitkontinuierliche, periodische Operatoren beschrieben werden. Wie beim  $H_z$ -Reglerentwurf zeitkontinuierlicher Systeme kann es sinnvoll sein, die Norm solcher Operatoren zu minimieren. Zur Zeit kann aber die Norm nur für ganz bestimmte Operatoren exakt berechnet werden (Chen & Francis [4]). So ist z. B. eine exakte Optimierung auf Regelsysteme mit stabiler Anlage beschränkt. Wie aber verschiedentlich gezeigt wurde (z. B. Francis & Georgiou [6]), ist die Analyse und Optimierung zeitdiskreter, periodischer Systeme viel einfacher. Es soll darum im Folgenden untersucht werden, wie abgetastete Systeme durch zeitdiskrete, periodische Operatoren approximiert werden können.

Während beim üblichen Reglerentwurf das System nur an den Abtastzeitpunkten  $k\tau_1$  des Reglers betrachtet wird, sollen für die hier vorgeschlagene Methode beliebig viele weitere, dazwischen liegende Zeitpunkte in die Optimierung einbezogen werden. Die dazu nötige Beschreibung des Systems wird durch eine Diskretisierung der zeitkontinuierlichen Teile bezüglich einer zusätzlichen, viel kürzeren Abtastzeit erhalten. Die gewählte Diskretisierung sei diejenige zeitdiskrete Abbildung, die entsteht, wenn die Eingangsgröße durch ein Halteglied erzeugt wird und der Ausgang alle  $\tau_s$  Sekunden abgetastet wird. Sie ist in Bild 1 dargestellt. Obwohl die Approximationsidee vom Gesichtspunkt der Simulationstechnik her leicht verständlich ist, soll anhand einer Regel zusammengefaßt werden, in welchen Fällen die induzierte Norm der zeitdiskreten Approximation gegen die Norm des ursprünglichen Operators konvergiert, wenn die Abtastzeit  $\tau_s$  gegen Null strebt.

Falls in einer Reihe von zeitkontinuierlichen Abbildungen jede durch die in Bild 1 dargestellte Approximation ersetzt wird, so entspricht dies dem Einfügen von Sequenzen eines Abtasters gefolgt von einem Halteglied, d. h.  $H_{\tau_s} S_{\tau_s}$ , zwischen den Abbildungen. Es soll darum zunächst ein Resultat von Chen & Francis [3] über den Operator  $H_{\tau_s} S_{\tau_s}$  wiederholt werden:

$$\lim_{\tau_s \rightarrow 0} \|(I - H_{\tau_s} S_{\tau_s}) W\| = 0 \quad (5)$$

falls  $W \in RH_\infty$  und strikt kausal ( $W(j\infty) = 0$ )

(Theorem 2 in [3] für  $\mathcal{L}_p$  induzierte Normen).

Chen & Francis zeigen insbesondere, daß  $\|H_{\tau_s} S_{\tau_s}\|$  nicht begrenzt ist. Die Gleichung (5) besagt also, daß  $H_{\tau_s} S_{\tau_s}$  nur

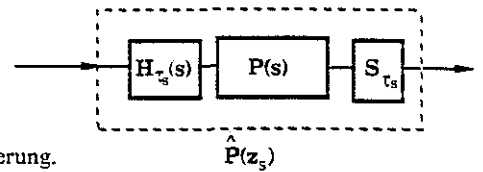


Bild 1. Diskretisierung.

für die Abbildung von Signalen mit einer gewissen Abfallrate des Frequenzspektrums (für  $\omega \rightarrow \infty$ ) gegen die Identität strebt. Diese Abfallrate wird durch die Abbildung mit der strikt kausalen Übertragungsfunktion  $W$  erhalten.

Da also die Norm von  $S_{\tau_s}$  und  $H_{\tau_s} S_{\tau_s}$  nicht begrenzt ist, die Bildung der schnell abgetasteten Approximation aber gerade dem Einfügen dieser Abbildungen entspricht, so stellt sich nun die Frage, in welchen Fällen der Approximationschritt zulässig ist. Mit Hilfe des grundlegenden Konvergenzgesetzes (5) und den Resultaten in Keller & Anderson [9] kann eine Regel zur Erzeugung zulässiger Approximationen hergeleitet werden.

#### Regel

In Signalpfade einer Folge von Abbildungen mit beschränkter Norm dürfen Abtaster  $S_{\tau_s}$  (und damit auch  $H_{\tau_s} S_{\tau_s}$ ) eingeführt werden, wenn eine der Einfügestelle unmittelbar vorangehende, strikt kausale Übertragungsfunktion zur benötigten Abfallrate des Frequenzspektrums für  $\omega \rightarrow \infty$  sorgt.

Wird diese Einfügeregel eingehalten, so strebt die induzierte Norm der Approximation gegen die induzierte Norm des ursprünglichen Systems, wenn die Abtastzeit der Approximation gegen Null strebt. Diese Regel wird im nächsten Abschnitt zur Lösung der zwei in der Einleitung beschriebenen Entwurfsprobleme angewendet.

Wird die kleinere Abtastzeit als ein ganzzahliger Bruchteil  $N$  der Abtastzeit  $\tau_1$  gewählt, so ist das resultierende System periodisch. Besonderheiten periodischer, zeitdiskreter Systeme werden im nächsten Abschnitt zusammengefaßt.

### 2.3 Zeitinvariante Darstellung periodischer, zeitdiskreter Operatoren

In diesem Abschnitt sollen die für die Optimierungsmethode wichtigen Eigenschaften periodischer Systeme beschrieben werden. Eine detailliertere Beschreibung ist z. B. in Khargonekar et al. [11] oder in Francis & Georgiou [6] zu finden.

Zeitdiskrete Systeme werden als  $N$ -periodisch bezeichnet, wenn das Bild (Ausgang) einer um  $nN$  ( $n \in \mathcal{N}$ ) Zeiteinheiten verschobenen Eingangsfolge gleich dem um  $nN$  Zeiteinheiten verschobenen Bild der ursprünglichen Eingangsfolge ist, d. h.  $A$  ist  $N$ -periodisch, falls

$$A^N A = A A^N \quad (A \text{ (Links) - Verschiebungsoperator}) \quad (6)$$

und  $N$  minimal.

Ist  $N = 1$ , so wird das System als zeitinvariant bezeichnet. Zeitdiskrete, periodische Systeme lassen sich durch Umordnung der Eingangs- und Ausgangsfolgen durch zeitvariante Übertragungsfunktionen beschreiben. Da die

Umordnung ein  $H_2$ -Gütekriterium nicht verändert, kann sie für die Optimierung des Approximationssystems angewendet werden.

Bei einem  $N$ -periodischen System können fortlaufend  $N$  aufeinander folgende Elemente der Eingangs- und Ausgangsfolgen zu Vektoren umgeordnet werden. Man erhält dadurch entsprechende Folgen von Vektoren. Ebenso kann ein dazu gehörender, modifizierter Operator berechnet werden. Dieser bildet dann die Folge von Eingangsvektoren auf die Folge von Ausgangsvektoren ab. Der zeitlichen Verschiebung um  $N$  Einheiten in einer ursprünglichen Folge entspricht nun einer Verschiebung um *eine* Einheit in der Vektoranordnung. Es folgt darum, daß der modifizierte Operator zeitinvariant ist. Eine formal vollständige Beschreibung dieser Umordnung ist z. B. in [11] zu finden. Ein Beispiel für  $N = 3$  soll die Bildung von Vektorfolgen klarstellen:

$$\hat{u} = [\dots \hat{u}(k\tau_s), \hat{u}((k+1)\tau_s), \hat{u}((k+2)\tau_s), \hat{u}((k+N)\tau_s), \hat{u}((k+N+1)\tau_s), \hat{u}((k+N+2)\tau_s), \hat{u}((k+2N)\tau_s), \hat{u}((k+2N+1)\tau_s) \dots]$$

Die Vektorfolge  $\tilde{u}$  ist dann:

$$\tilde{u} = \begin{bmatrix} \hat{u}(k\tau_s) & \hat{u}((k+N)\tau_s) & \hat{u}((k+2N)\tau_s) \\ \dots & \hat{u}((k+1)\tau_s) & \hat{u}((k+N+1)\tau_s) & \hat{u}((k+2N+1)\tau_s) \dots \\ \hat{u}((k+2)\tau_s) & \hat{u}((k+N+2)\tau_s) & \dots \end{bmatrix} \quad (7)$$

Dabei kann  $\hat{u}(\cdot)$  selber auch ein Vektor sein. Man beachte, daß  $\tilde{u}$  aufgrund der Umordnung eine Folge mit Zeitmaßstab  $\tau_i = N\tau_s$  ist.

Beim Reglerentwurf werden meistens zeitinvariante Modelle der Anlage verwendet. Natürlich lassen sich auch zeitinvariante Übertragungsfunktionen als Abbildungen der vorangehend beschriebenen Vektorfolgen darstellen. Die dazugehörigen Übertragungsfunktionen können in ihrer Zustandsraumdarstellung explizit angegeben werden.

Für ein Mehrgrößensystem

$$y = \hat{G}u, \hat{G}(z_s) = D + C(z_s I - A)^{-1} B$$

kann die Abbildung  $\tilde{G}$  der Vektorfolge  $\tilde{u}$  auf  $\tilde{y}$  wie folgt berechnet werden:

$$\tilde{G} = \tilde{D} + \tilde{C}(z_i I - \tilde{A})^{-1} \tilde{B} \quad (8)$$

mit

$$\tilde{A} = A^N, \quad \tilde{B} = [A^{N-1} B \quad A^{N-2} B \dots B],$$

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{N-1} \end{bmatrix}, \quad \tilde{D} = \begin{bmatrix} D & 0 & \dots & 0 \\ CB & D & & 0 \\ CAB & CB & & 0 \\ \vdots & & & \\ CA^{N-2} B & \dots & CAB & CB & D \end{bmatrix} \quad (9)$$

Entsprechende, explizite Darstellungen aufgrund von Potenzreihen der Übertragungsfunktion sind in [11] zu finden. Es ist zu beachten, daß trotz der Umordnung die

Modellordnung unverändert bleibt. Die Ordnung von  $\tilde{G}(z_i)$  ist also gleich der Ordnung von  $\hat{G}(z_s)$ .

Ein Abtaster, der jedes  $N$ -te Element in der ursprünglichen Folge herausgreift, hat folgende einfache Matrixdarstellung für die Abbildung von umgeordneten Vektorfolgen:

$$\tilde{S} = [I_p \ 0_p \ \dots \ 0_p] \quad (10)$$

mit der Dimension  $(p, pN)$ , d. h. sein Ausgang ist jeweils das erste Element der umgeordneten Folge. Es wird dabei *willkürlich angenommen*, daß die Folgen so in Vektorfolgen umgeordnet worden sind, daß das abgetastete Element immer das erste eines Vektors ist.

Ebenso einfach ist die Darstellung eines Haltegliedes:

$$\tilde{H} = \begin{bmatrix} z_i^{-1} I_q \\ \vdots \\ z_i^{-1} I_q \\ I_q \\ \vdots \\ I_q \end{bmatrix} \quad (11)$$

mit der Dimension  $(v + (N - v)q, q)$  mit  $v \in \{0, 1, \dots, N\}$ , wobei  $v$  eine allfällige Verzögerung oder Phasenverschiebung ( $v/N$ ) des Haltegliedes gegenüber dem Abtaster wiedergibt. Die Größen  $p$  und  $q$  beschreiben die Dimension der Elemente (Vektoren in Mehrgrößensystemen) der ungeordneten Folgen und damit auch die Dimension der Einheitsmatrizen  $I_p$  und  $I_q$  und der quadratischen Nullmatrix  $0_p$ . Die Abbildung  $\tilde{H}$  erzeugt eine Vektorfolge, in der jedoch die ersten  $v$  Elemente um  $\tau_i$  verzögert werden. Dies entspricht einer Totzeit von  $v\tau_s$  Sekunden. Dies kann zum Beispiel anhand der Abbildung  $\tilde{H}\tilde{S}$  einfach verifiziert werden. Der Abtaster  $\tilde{S}$  reduziert die Dimension seiner Vektoreingangsfolge um einen Faktor  $N$ , während das Halteglied  $\tilde{H}$  wiederum eine Vergrößerung um denselben Faktor bewirkt. Dies spiegelt die Übergänge zwischen zwei zeitdiskreten Systemen unterschiedlicher Taktfrequenzen wider, die nun aufgrund der Umordnung als zeitinvariante Abbildungen mit unterschiedlichen Dimensionen der Definitions- und Bildräume dargestellt werden können.

Die Umordnung hat eine Eigenschaft, die sie zur Verwendung bei der Optimierung von  $l_2$  induzierten Operatornormen sehr nützlich macht:

$$\|\tilde{u}\|_2 = \sqrt{\frac{\tau_i}{\tau_s}} \|\hat{u}\|_2, \quad (12)$$

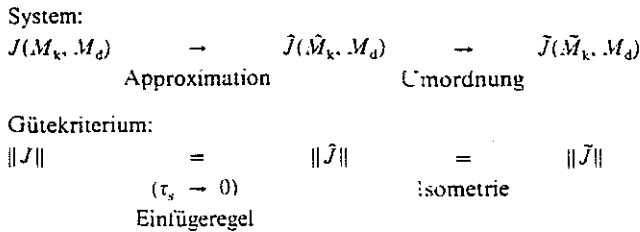
da

$$\sum_k \hat{u}_d(k\tau_s) \hat{u}_d(k\tau_s) = \sum_k \tilde{u}_d(k\tau_i) \tilde{u}_d(k\tau_i) \quad (13)$$

gilt, d. h. durch die Umordnung wird die  $l_2$ -Norm linear mit dem Faktor  $\sqrt{\frac{\tau_i}{\tau_s}}$  verändert. Dies gilt sowohl für Eingangs- als auch Ausgangsfolgen. Die induzierte Norm eines Operators bleibt somit trotz dem Umordnen unverändert. Diese Isometrie der Umordnung ermöglicht die Optimierung von induzierten Normen zeitdiskreter, periodischer Operatoren anhand von zeitinvarianten Übertragungsfunktionen.

### 3 Die Optimierungsmethode

Im vorangehenden Abschnitt wurden die zwei wesentlichen Schritte der Optimierungsmethode untersucht, nämlich der Approximationsschritt und die Umordnung. Das folgende Schema veranschaulicht nun die Abfolge der Schritte im Zusammenhang mit den dazugehörigen Relationen der Gütekriterien:



Das Schema zeigt, wie die Minimierung von  $\|J\|$  in ein Standard- $H_\infty$ -Optimierungsproblem nämlich die Minimierung der Norm der zeitinvarianten Übertragungsfunktion  $\tilde{J}$  umgewandelt wurde. Für die Berechnung der Approximation muß ein endlicher Wert für  $N$  festgelegt werden. Der Wert von  $N$  wird maßgeblich durch die Bedeutung des  $H_\infty$ -Entwurfskriteriums gegeben. Ist dieses lediglich ein Optimierungsmaß, das keine Randbedingungen erfüllen muß, so kann man mit einem relativ kleinen  $N$  zufrieden sein. Die möglicherweise schlechtere Approximation kann nur zu einer Suboptimalität des Entwurfes führen. Für praktische Entwürfe ist das Verhalten zwischen den Abtastzeitpunkten  $k\tau_1$  oft schon genügend gut charakterisiert, wenn z. B. 3 zusätzliche Punkte pro Abtastintervall ( $N = 4$ ) berücksichtigt werden. Beim üblichen zeitdiskreten Entwurf wird  $N = 1$  gewählt. An die Approximationsgenauigkeit sind aber andere Anforderungen zu stellen, wenn Randbedingungen bezüglich des Wertes des Gütekriteriums zu erfüllen sind. Randbedingungen ergeben sich oft aus Stabilitäts- oder Robustheitsuntersuchungen. Ein typisches Beispiel ist das Kriterium  $J_D$  der Reglerdiskretisierung in Abschnitt 4.1 ( $\|J_D\| < 1$ ). Da der Entwurf in der Regel sinnlos ist, wenn die Randbedingungen nicht erfüllt sind, muß zu ihrer Kontrolle  $N$  so groß gewählt werden, daß man eine genügend gute Approximation erzielt. Geschätzte Bandbreiten der durch die Approximation betroffenen Variablen geben Anhaltspunkte für die Wahl von  $N$ .

### 4 Anwendung der Optimierungsmethode

Die Möglichkeit der Optimierung abgetasteter Systeme erlaubt die Lösung verschiedener Entwurfsprobleme.

Dies soll nun für zwei Anwendungen gezeigt werden, nämlich für die Diskretisierung zeitkontinuierlicher Regler und für den direkten Entwurf eines zeitdiskreten Reglers.

#### 4.1 Diskretisierung zeitkontinuierlicher Regler

Die Diskretisierung eines zeitkontinuierlichen Reglers kann als ein Reglerapproximationsproblem aufgefaßt werden. Reglerapproximationsprobleme im Zusammenhang mit der Ordnungsreduktion wurden von *Anderson & Liu* [2] untersucht. Die darin vorgeschlagenen Approximationskriterien können auch auf das vorliegende Problem angewendet werden. Man erhält dadurch  $H_\infty$ -Gütekriterien abgetasteter Systeme, die mit Hilfe des vorgeschlagenen Vorgehens optimiert werden können. Eine daraus resultierende Diskretisierungsmethode wurde von *Keller & Anderson* [9] vorgeschlagen. Folgende außergewöhnliche Eigenschaften zeichnen diese Methode aus:

1. Stabilität kann für das abgetastete Reglersystem garantiert werden.
2. Reglertotzeiten als Folge der Implementierung können auf einfache Art und Weise bei der Diskretisierung berücksichtigt werden.
3. Aufgrund der Verwendung eines zeitkontinuierlichen Reglerapproximationskriteriums wird auch das Verhalten zwischen den Abtastzeitpunkten bei der Reglerbestimmung berücksichtigt. Die Methode ist zur Zeit auf die Diskretisierung stabiler Regler beschränkt.

Ein zeitdiskreter Regler  $C_1(z_1)$  soll durch Diskretisierung eines bekannten zeitkontinuierlichen Reglers  $C(s)$  bestimmt werden. Das Blockdiagramm des abgetasteten Reglersystems wurde in Bild 2 dargestellt.  $F_a$  bezeichnet darin einen strikt kausalen Abtastvorfilter. Zum Regelkreis wurde ohne Veränderung des Systems der bekannte, zeitkontinuierliche Regler zur Formulierung eines Reglerapproximationsproblems hinzugefügt. Mit dem Operator  $\Delta \triangleq C - H_{\tau_1} C_1 S_{\tau_1} F_a$  wird das abgetastete System in Verbindung zum ursprünglichen, zeitkontinuierlichen gebracht, d. h. je kleiner ein Maß für die Größe von  $\Delta$ , desto kleiner ist die Differenz zwischen dem Ausgang des abgetasteten und des zeitkontinuierlichen Systems. Insbesondere ist das System in Bild 2 stabil, falls für  $J_D \triangleq \Delta(I + PC)^{-1} P$  gilt:

$$\|J_D\| < 1. \tag{14}$$

$\|\cdot\|$  ist dabei die  $\mathcal{L}_2$ -induzierte Operatornorm.

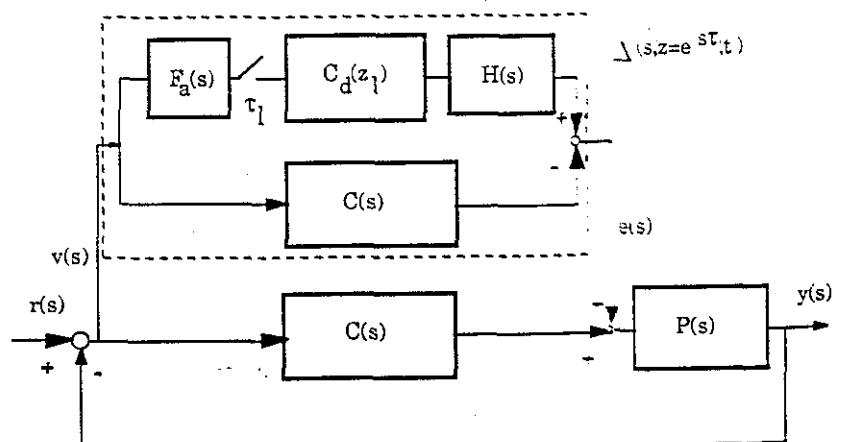


Bild 2. Variante des abgetasteten Systems.

Fortsetzung auf Seite 119)

(Fortsetzung von Seite 118)

Dies folgt aufgrund des „small gain theorem“ (Desoer & Vidyasagar [5]), da  $\|A\| < \infty$  und  $\|(I + PC)^{-1}P\| < \infty$ . Die Norm von  $A$  ist beschränkt, da  $\|S_{\tau_1}F_a\|$  aufgrund des Satzes von Chen & Francis [3] beschränkt ist,  $\|H_{\tau_1}\| = 1$  und  $C(s)$  und  $C_1(z_1)$  stabil sind. Es wird angenommen, daß der zeitkontinuierliche Entwurf sinnvoll ist, d. h. daß  $(I + PC)^{-1}P$  stabil und darum  $\|(I + PC)^{-1}P\|$  beschränkt ist.

Stabilität des Regelsystems und Minimierung der Größe von  $A$  werden miteinander kombiniert, wenn der zeitdiskrete Regler durch die Minimierung von  $\|J_D\|$  bestimmt wird:

$$C_1 = \arg \min_{C_1 \in RH_\infty} \|J_D\|. \tag{15}$$

$J_D$  ist nun aber ein Operator, der sowohl zeitkontinuierliche als auch zeitdiskrete Teile enthält. Zur Minimierung von  $\|J_D\|$  soll nun die in den vorangehenden Abschnitten beschriebene Methode angewendet werden.

Mit  $W \triangleq (I + PC)^{-1}P$  ist

$$J_D = \Delta W = (C - H_{\tau_1}C_1S_{\tau_1}F_a)W. \tag{16}$$

Wendet man die Regel zur Bildung der schnell abgetasteten Approximation zweimal an, so ergeben sich folgende Schritte (Fettgedruckt sind die hinzugefügten Abbildungen):

$$\begin{aligned} J_D &= (C - H_{\tau_1}C_1S_{\tau_1}F_a)W \\ &\quad (1) \downarrow \\ S_{\tau_s}(C - H_{\tau_1}C_1S_{\tau_1}F_a)WH_{\tau_s} \\ &\quad (2) \downarrow \\ S_{\tau_s}(C - H_{\tau_1}C_1S_{\tau_1}F_a)H_{\tau_s}S_{\tau_s}WH_{\tau_s} \\ &\quad (3) \downarrow \text{Substitution von } S_{\tau_1} \\ S_{\tau_s}(C - H_{\tau_1}C_1\hat{S}S_{\tau_s}F_a)H_{\tau_s}S_{\tau_s}WH_{\tau_s} &= \\ &= ((\hat{C} - \hat{H}C_1\hat{S}\hat{F}_a)\hat{W}) = \hat{J}_D \end{aligned} \tag{17}$$

Darin bezeichnet „ $\hat{\cdot}$ “ die Diskretisierung der entsprechenden Übertragungsfunktionen nach Bild 1. Die Bedingungen zur Anwendung der Einfügeregel sind erfüllt, wenn man beachtet, daß ein Halteglied folgendermaßen faktorisiert werden kann:

$$\begin{aligned} H_{\tau_1,s} &= \frac{1 - e^{-s\tau_1}}{s} = \\ &= \frac{1}{s+a} \frac{s+a}{s} (1 - e^{-s\tau_1}), \quad a \in \mathbb{R}^+ \end{aligned} \tag{18}$$

mit  $\frac{s+a}{s}(1 - e^{-s\tau_1})$  kausal

und  $\frac{1}{s+a} \in RH_\infty$ , strikt kausal.

Die schnell abgetastete Approximation ist also:

$$\hat{J}_D \triangleq (\hat{C} - \hat{H}C_1\hat{S}\hat{F}_a)\hat{W}. \tag{19}$$

Aufgrund von  $\hat{S}$  und  $\hat{H}$  ist  $\hat{J}_D$  ein  $N$ -periodischer Operator ( $\tau_s \cdot N = \tau_1$ ).  $\hat{J}_D$  kann nun nach der in Abschnitt 2 beschriebenen Methode mit Hilfe einer zeitinvarianten Übertragungsfunktion dargestellt werden. Bezeichnet man darin die umgeordneten Übertragungsfunktionen mit „ $\tilde{\cdot}$ “, so folgt:

$$\tilde{J}_D(z_1) = \left( \tilde{C}(z_1) - \begin{bmatrix} z_1^{-1}I_q \\ \vdots \\ (v) \\ z_1^{-1}I_q \\ I_q \\ \vdots \\ I_q \end{bmatrix} C_1(z_1) [I_p \ 0_p \ \dots \ 0_p] \tilde{F}_a(z_1) \right) \tilde{W}(z_1). \tag{20}$$

Für ein genügend großes  $N$  kann  $C_1$  durch die Minimierung von  $\|\tilde{J}_D\|$  erhalten werden. Dies ist ein Standard- $H_\infty$ -Problem. Beispiele haben gezeigt, daß  $\tilde{J}_D$  das Originalkriterium  $J_D$  gut approximiert, wenn  $\tau_s$  mehr als 20 mal kleiner als diejenige maximale Abtastzeit gewählt wird, die aufgrund der Bandbreite von  $PC(I + PC)^{-1}$  bestimmt werden kann (Franklin & Powell [8]). Der Parameter  $v$  ermöglicht den Einbezug einer Totzeit von  $v\tau_s$  des Reglers.

Anhand des verwendeten, hinreichenden Stabilitätskriteriums kann auch eine obere Grenze für die Abtastzeit bestimmt werden. Sie ist diejenige Abtastzeit, für die  $\|J_D\| < 1$  gerade noch erreicht werden kann. Wie Erfahrungen zeigen, ist der Wert von  $\|\tilde{J}_D\|$  zudem ein Indikator für die Kosten der Diskretisierung. Ist  $\|\tilde{J}_D\| < 0,1$ , so ist eine gute Übereinstimmung der Ausgänge des zeitkontinuierlichen und des abgetasteten Systems zu beobachten.

In  $\hat{J}_D$  wird ein bezüglich einer sehr kurzen Abtastzeit diskretisierter Regler durch einen Regler mit größerer Abtastzeit approximiert. Die Methode beinhaltet also auch die Möglichkeit, einen gegebenen zeitdiskreten Regler durch einen Regler mit längerer Abtastzeit zu approximieren. Diese sollte dabei ein ganzzahliges Vielfaches der ursprünglichen Abtastzeit sein.

### 4.2 Direkter Entwurf zeitdiskreter Regler

Mit Hilfe der beschriebenen Optimierungsmethodik können zeitdiskrete Regler auch direkt durch die Optimierung von zeitkontinuierlichen Gütekriterien bestimmt werden. Grundlage dafür ist die im Folgenden hergeleitete Approximation abgetasteter Regelsysteme.

Die Abbildung von  $[v, d]^T$  auf  $z_h$  (siehe Bild 3) ist ein periodischer Operator mit zeitkontinuierlichen und zeit-

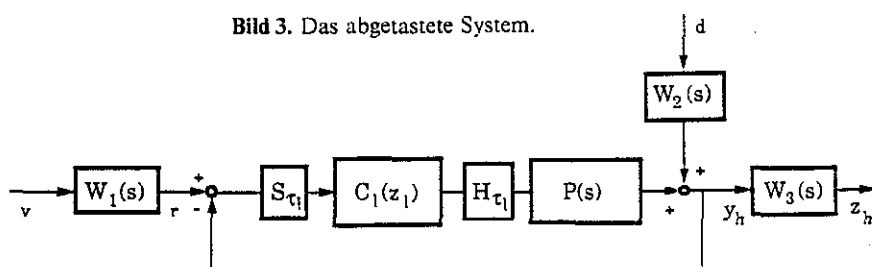


Bild 3. Das abgetastete System.

diskreten Teilen. In der Regel ist es das Ziel eines Reglerentwurfs, diese Abbildung durch einen Regler  $C_1$  günstig zu beeinflussen. Dies ist jedoch nur sinnvoll, wenn die Abbildung eine endliche induzierte Norm hat. Eine dafür notwendige Bedingung ist, daß  $W_1$  und  $W_2$  strikt kausal sind. Ohne große Einschränkung bezüglich der Gütekriterien wird vorausgesetzt, daß  $W_3 \in \mathcal{RH}_\infty$ .

Damit eine Optimierung der Abbildung von  $[v, d]^T$  auf  $z_h$  rechnerisch möglich wird, soll das System in Bild 3 wiederum durch ein beliebig schnell abgetastetes System, dargestellt in Bild 5 approximiert werden. Die Approximationsschritte werden am einfachsten mit Hilfe von Blockdiagrammen gezeigt. Ausgehend von Bild 3 kann die Approximation in Bild 4 erhalten werden. Die eingefügten Elemente sind darin hervorgehoben.  $W_2$  ist nach Voraussetzung strikt kausal und aus  $H_{\tau_s}$  kann nach (18) ein skalarer, kommutierender und strikt kausaler Faktor erhalten werden. Da  $\|W_3\| < \infty$  vorausgesetzt wird, ist die Anwendung der Einfügeregel in beliebiger Reihenfolge möglich. Die Norm der Abbildung von  $[\hat{v}, \hat{d}]^T$  auf  $\hat{z}_h$  (Bild 4) strebt darum gegen die Norm der ursprünglichen Abbildung  $[v, d]^T$  auf  $z_h$  (Bild 3), wenn  $\tau_s$  nach Null strebt.

In Bild 4 kann  $S_{\tau_1} = \hat{S}S_{\tau_s}$  und  $H_{\tau_1} = H_{\tau_s}\hat{H}$  eingesetzt werden. Schiebt man nun den Abtaster  $S_{\tau_s}$  vor  $\hat{S}$  im Gegenuhrzeigersinn um den Regelkreis hinter  $P$  und berücksichtigt die Konsequenzen in den zu- und wegführenden Signalpfaden, so wird durch Einsetzen der Definitionen „ $\hat{\cdot}$ “ das Blockdiagramm in Bild 5 erhalten.

Wegen des Abtasters  $\hat{S}$  und des Halteglieds  $\hat{H}$  ist das System in Bild 5 wiederum ein  $N$ -periodisches System und kann durch eine zeitinvariante Übertragungsfunktion dargestellt werden. Wie in [11] gezeigt wurde, kann die umgeordnete Darstellung eines Regelkreises mit den umgeordneten Darstellungen seiner Elemente direkt bestimmt werden, d. h. in Bild 5 kann „ $\hat{\cdot}$ “ durch „ $\sim$ “ ersetzt werden. Es ist nun einfach zu überprüfen, daß die Abbildung von  $[\hat{v}, \hat{d}]^T$  nach  $\hat{z}$  durch folgenden linearen Bruchteil dargestellt werden kann:

$$\hat{z} = \mathcal{F}l\{\tilde{G}, C_1\} \begin{bmatrix} \hat{v} \\ \hat{d} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{G} = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{W}_3 \tilde{W}_2 & : & \tilde{W}_3 \tilde{P} \tilde{H} \\ \dots & \dots & & \dots \\ \tilde{S} \tilde{W}_1 & -\tilde{S} \tilde{W}_2 & : & -\tilde{S} \tilde{P} \tilde{H} \end{bmatrix} \quad (21)$$

mit

$$\mathcal{F}l\left\{ \begin{bmatrix} \tilde{G}_{11} & \tilde{G}_{12} \\ \tilde{G}_{21} & \tilde{G}_{22} \end{bmatrix}, C_1 \right\} = \tilde{G}_{11} + \tilde{G}_{12} C_1 (I - \tilde{G}_{22} C_1)^{-1} \tilde{G}_{21}.$$

Bild 4. Approximation des abgetasteten Systems.

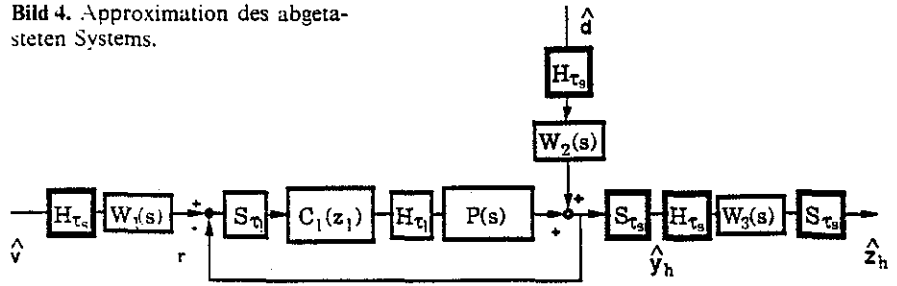


Bild 5. Zeitdiskrete Approximation des abgetasteten Systems.

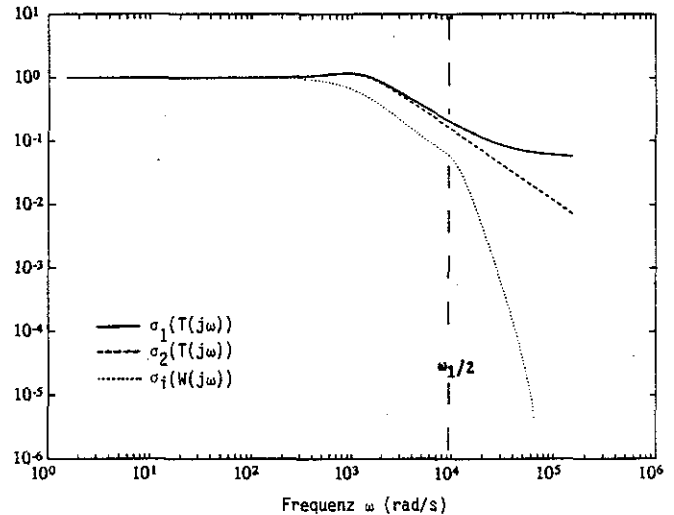
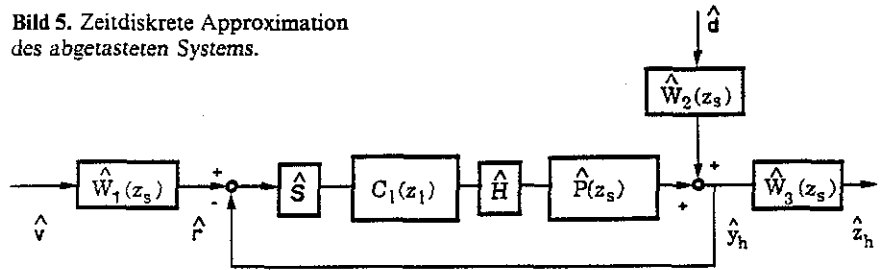


Bild 6.  $\bar{\sigma}(T(j\omega))$  und  $|f_e(j\omega)|$ .

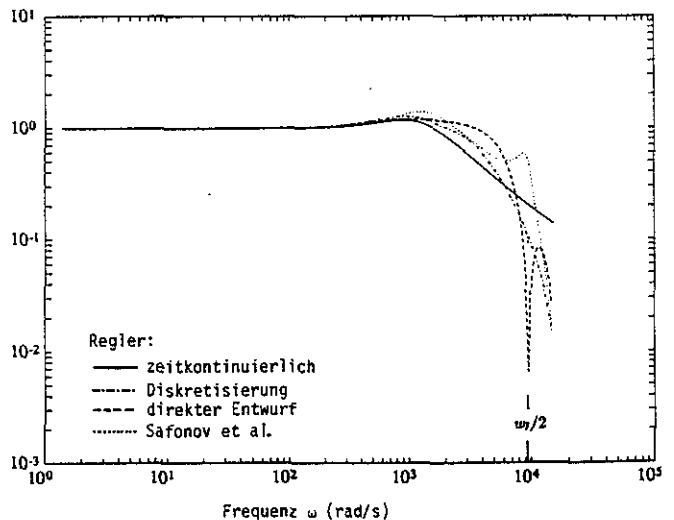
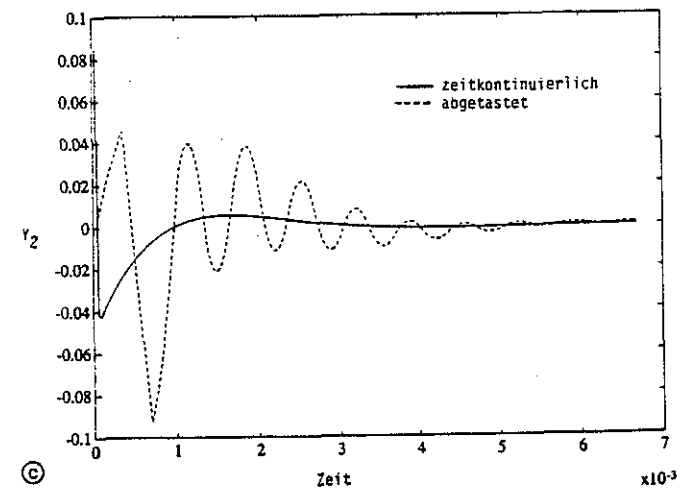
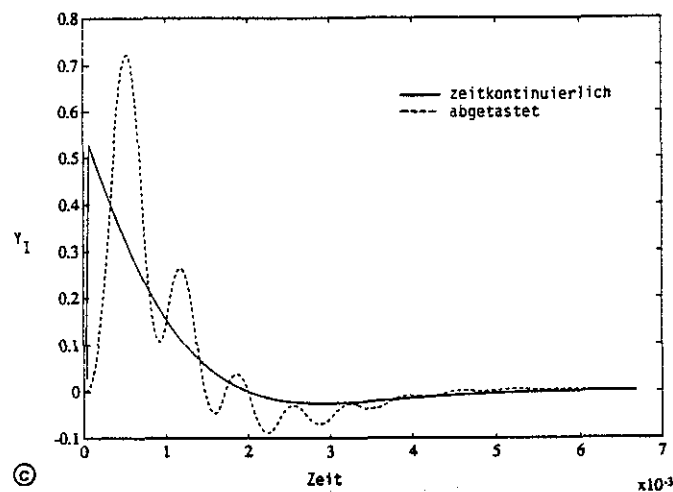
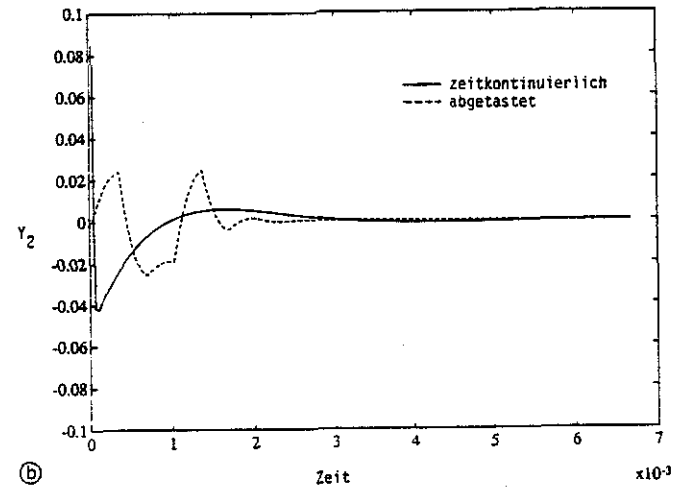
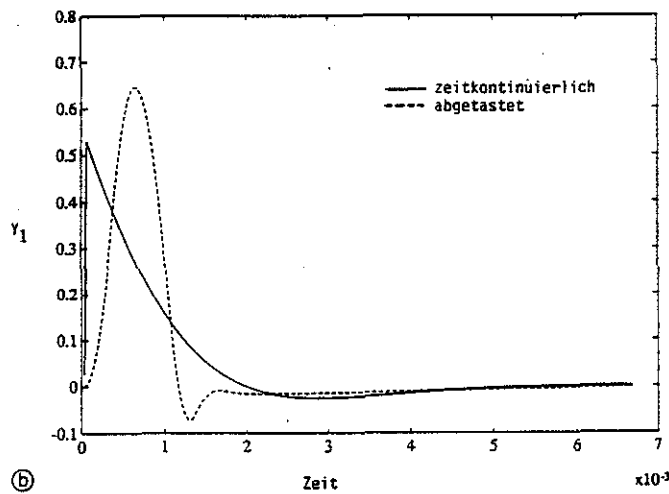
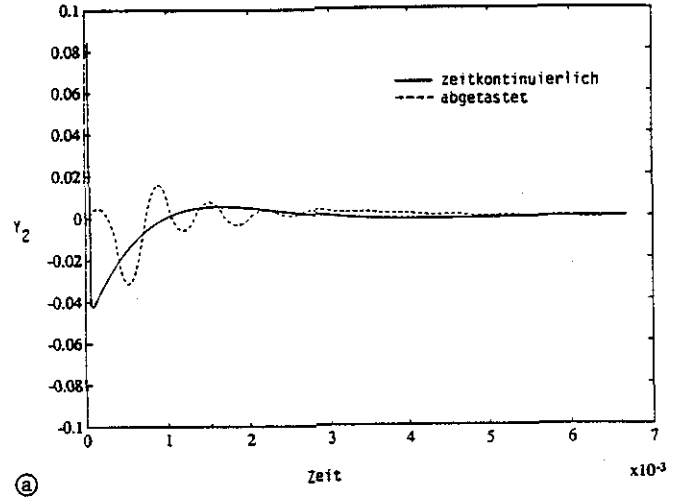
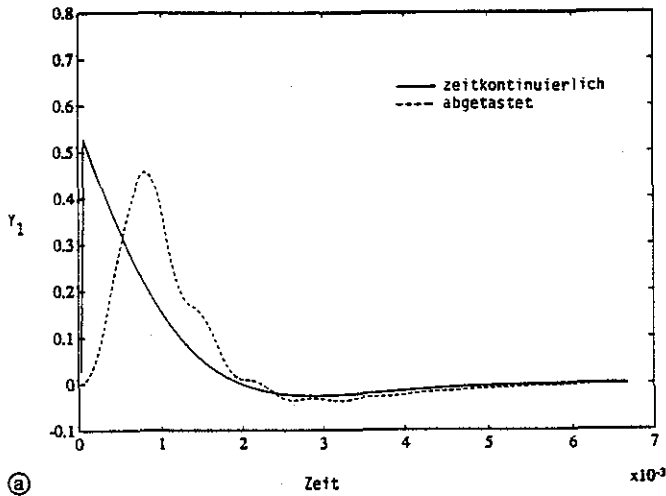


Bild 7. Komplementäre Sensitivitätsfunktion.

Soll zum Beispiel die Norm der Abbildung von  $\vec{d}$  auf  $\vec{z}$  minimiert werden, so ergibt sich ein Standard- $H_\infty$ -Optimierungsproblem. Für die Existenz einer Lösung muß  $\tilde{G}$  durch die Eingangs- und Ausgangsvariablen von  $\tilde{G}_{22}$  stabilisierbar sein (siehe z.B. Francis [7]). Da die Gewichtungen  $W_i$  nach Voraussetzung stabile Übertragungsfunktionen sind, kann höchstens  $\tilde{P}$  instabile Teile

enthalten. Die Stabilisierbarkeit von  $\tilde{G}$  ist also gewährleistet, wenn  $\tilde{G}_{22} = \tilde{S}\tilde{P}\tilde{H}$  stabilisierbar ist.  $\tilde{S}\tilde{P}\tilde{H}$  ist nun aber gerade die Diskretisierung  $P_1(z) = S_{r1}P(s)H_{r1}$ .  $\tilde{G}$  ist also stabilisierbar, wenn die übliche Diskretisierung der Anlage  $P_1(z)$  stabilisierbar ist. Im weiteren ist die Menge der stabilisierenden Regler ebenfalls gleich derjenigen des üblichen zeitdiskreten Reglerentwurfs.



**Bild 8. Impulsantworten:**

- a) Diskretisierter Regler (Abschnitt 4.1),
- b) Direkter Entwurf (Abschnitt 4.2),
- c) Entwurf von Safonov et al.

**Bild 9. Impulsantworten:**

- a) Diskretisierter Regler (Abschnitt 4.1),
- b) Direkter Entwurf (Abschnitt 4.2),
- c) Entwurf von Safonov et al.



### 5 Beispiel

Mit den vorgeschlagenen Methoden zur Reglerdiskretisierung und zum direkten, zeitdiskreten Reglerentwurf wurden Regler für ein Modell einer Weltraumantenne entworfen. Das Regelproblem ist in [13] beschrieben. Es soll ein Mehrgrößenregler für die teilweise geregelte Anlage entworfen werden. Das zeitkontinuierliche, vereinfachte Modell der teilweise geregelten Anlage ist 4. Ordnung mit 2 Eingangs- und 2 Ausgangsvariablen. Die Abtastzeit des gesuchten Reglers sei 3000 Hz. *Safonov et al.* [13] entwerfen einen  $H_\infty$ -optimalen zeitkontinuierlichen Regler, der mit Hilfe einer konformen Abbildung diskretisiert wird. Leider geben sie nicht an, wie die Parameter der konformen Abbildung bestimmt worden sind. Sie verifizieren die Erfüllung der Güteanforderungen mit dem Originalmodell der Ordnung 116. Um die Effekte von Modellreduktion und Reglerdiskretisierung zu trennen, werden in diesem Beitrag die entworfenen Regler am Entwurfsmodell 4. Ordnung getestet.

Der von *Safonov et al.* entworfene zeitkontinuierliche Regler wurde mit der vorangehend beschriebenen Methode (Abschnitt 4.1) diskretisiert. Eine direkte Optimierung des zeitkontinuierlichen Regelgütekriteriums nach Abschnitt 4.2 ergab den zweiten zeitdiskreten Regler. Da die Gewichtungsfunktion von *Safonov et al.* die Bedingungen zur Anwendung der Einfügeregel nicht erfüllen, muß für den direkten Entwurf ein Eingangsfiler oder eine zusätzliche Gewichtung  $F_e$  eingeführt werden. Für das Beispiel wurde ein Filter der Form  $f_e(s)I$  gewählt. Das skalare  $f_e$  besteht aus einer Übertragungsfunktion 2. Ordnung und einem Butterworthfilter 2. Ordnung. Es dient zur Gewichtung im Bereich um  $\omega_1/2 = \pi/\tau_1$  und zur Begrenzung der Bandbreite der Eingangssignale. In Bild 6 ist der größte Singularwert der komplementären Sensitivitätsfunktion und der Betrag der verwendeten Gewichtung  $f_e$  dargestellt. Die von *Safonov et al.* vorgeschlagene Gewichtung  $W_4^{-1}$  ist keine kausale Übertragungsfunktion.  $W_4^{-1}$  kann aber mit vernachlässigbaren Folgen durch eine kausale Übertragungsfunktion ersetzt werden.

Um die Regler mit *Safonovs* Entwurf vergleichen zu können, wurde auf die Einführung einer Totzeit  $\nu\tau_s$ ,

verzichtet ( $\nu = 0$ ). Der Wert von  $N$  wurde auf 10 festgelegt. Die aus der  $H_\infty$ -Optimierung erhaltenen Regler waren relativ hoher Ordnung (Ordnung von  $\bar{G}$ ). Mit Hilfe einer Modellreduktion nach *Moore* [12] konnte aber die Ordnung beider Regler ohne merkliche Veränderung des Systems auf 8 verkleinert werden. Falls eine weitere Reduktion der Reglerordnung nötig ist, so können die von *Anderson & Liu* [2] vorgeschlagenen, die Stabilität des Regelkreises erhaltenden Methoden angewandt werden. Der von *Safonov et al.* entworfene Regler ist 11. Ordnung.

Die resultierenden, abgetasteten Regelsysteme sollen nun mit dem zeitkontinuierlichen Regelsystem verglichen werden. Das Führungsverhalten wird im Frequenzbereich anhand der Abbildung des abgetasteten Steuervektors  $u_1^*(j\omega)$  auf den Ausgangsvektor  $y(j\omega)$  analysiert. In Bild 7 ist der Graph des größten Singularwertes der Abbildungsmatrix aufgezeichnet. Gute Übereinstimmung aller Systeme ist im Bereich niederer Frequenzen zu erkennen. Im Bereich der halben Abtastfrequenz  $\omega_1/2$  und der Knickfrequenz jedoch unterscheiden sich die verschiedenen Entwürfe deutlich. Für den Regler von *Safonov et al.* ist wegen der viel höheren Werte bei  $\omega_1/2$ , ein schlechteres Verhalten zwischen den Abtastzeitpunkten zu erwarten. Im Zeitbereich wird sich die größere Resonanzüberhöhung durch ein größeres Überschwingen der Impuls- oder Schrittantworten bemerkbar machen. Der direkte Reglerentwurf führt zu einem System mit größerer Bandbreite, was aber in keinem Widerspruch zu den Entwurfsspezifikationen steht. Die simulierten Impulsantworten der verschiedenen Systeme sind in Bild 8 und 9 aufgezeichnet. Die Bilder zeigen die Antworten  $y_1$  und  $y_2$  auf einen Impuls am Eingang  $u_1$ . Sie bestätigen die Aussagen der Frequenzbereichsanalyse sehr deutlich. Das bessere Verhalten zwischen den Abtastzeitpunkten belegt, daß durch die in dieser Arbeit vorgeschlagenen Entwurfsmethoden das Verhalten zwischen den Abtastzeitpunkten in die Optimierung integriert wird. In Bild 11 sind die größten Singularwerte der Sensitivitätsfunktion der verschiedenen Regler aufgezeichnet. Laut Entwurfsspezifikationen muß dieser bis zu  $\omega = 95$  rad/s kleiner als 0,01 sein. Diese Entwurfsspezifikation wird mit dem

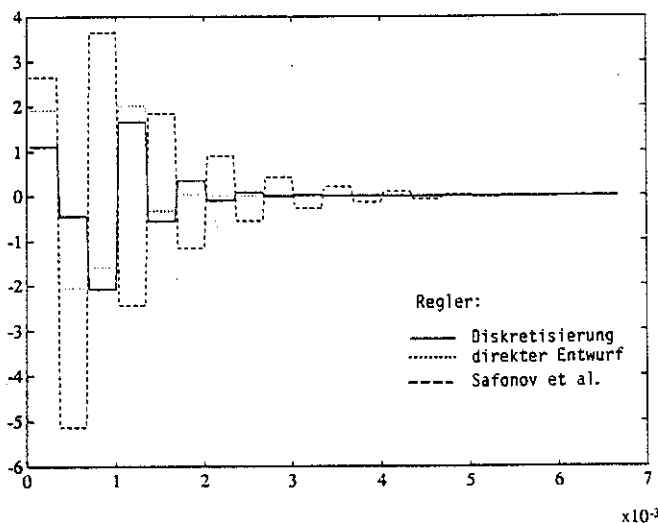


Bild 10. Stellverläufe.

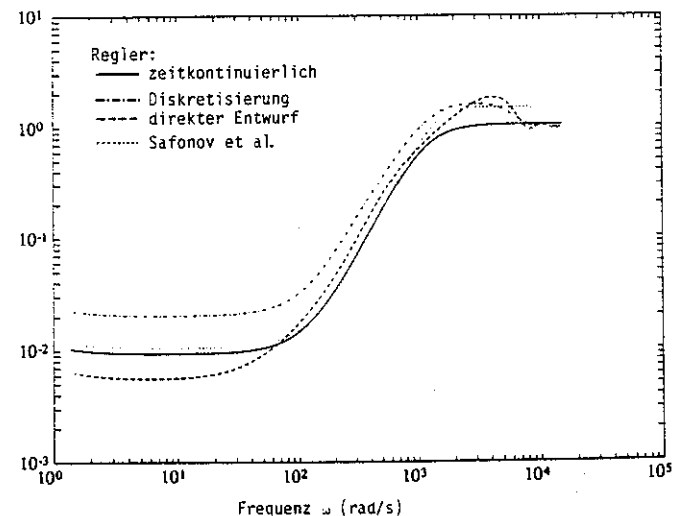


Bild 11. Sensitivitätsfunktion.

diskretisierten Regler nicht erfüllt. Ein weiterer Aspekt des Entwurfes zeitdiskreter Regler ist die Größe der Stellverläufe. Da der diskretisierte Regler eine Approximation des zeitkontinuierlichen ist, sind keine größeren Stellamplituden als beim zeitkontinuierlichen Regler zu erwarten. Auch beim direkten Entwurf resultieren aufgrund der Optimierung des zeitkontinuierlichen Verhaltens des Regelkreises etwa die gleichen Stellbeträge. Dies wird in Bild 10 gezeigt.

## 6 Schlußfolgerung

Die vorgeschlagene Methodik zur Optimierung abgetasteter Systeme ist ein einfacher, gut geeigneter Weg zur Berechnung zeitdiskreter Regler. Dies wurde anhand zweier Entwurfsprobleme gezeigt.

Die Diskretisierung eines stabilen Reglers konnte als Reglerapproximationsproblem gelöst werden. Da das Approximationskriterium durch die Verwendung des Reglers im geschlossenen Regelkreis bestimmt wird, kann für das resultierende, abgetastete System Stabilität garantiert werden. Ist die Abtastzeit nicht zu nahe an der Grenze, wo Stabilität gerade noch erreicht werden kann, so ist auch eine gute Regelgüte zu erwarten. Das Prinzip der Reglerdiskretisierung läßt sich auch zur Abtastzeiterhöhung gegebener, zeitdiskreter Regler verwenden.

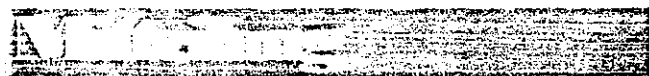
Sehr gute Resultate wurden beim direkten Entwurf eines zeitdiskreten Reglers anhand einer zeitkontinuierlichen  $H_\infty$ -Gütespezifikation erreicht. Das Beispiel zeigt, daß das resultierende, abgetastete Regelsystem vergleichbare Eigenschaften mit dem zeitkontinuierlichen Entwurf hat. Insbesondere wird auch das Verhalten zwischen den Abtastzeitpunkten in der Regleroptimierung berücksichtigt. Der vorgeschlagene Entwurfsweg erspart also das iterative Vorgehen von Reglerentwurf und Simulation zur Erreichung eines zufriedenstellenden, zeitkontinuierlichen Verhaltens.

Die vorgeschlagene Methodik zur Optimierung abgetasteter Systeme kann auch für Systeme verwendet werden, in denen die Anlage zeitkontinuierliche und zeitdiskrete Teile enthält. Im weiteren könnte sie einen Ansatzpunkt bilden, um die Abtastzeit eines Systems auf systematische Weise bestimmen zu können. Interessant ist dabei, wie die erreichbare Regelgüte von der Abtastzeit abhängt.

## Literatur

- [1] Ackermann, J.: Abtastregelung I, II. Springer-Verlag, Berlin 1983.
- [2] Anderson, B. D. O., und Liu, Y.: Controller reduction: concepts and approaches. Proc. ACC, 1987, S. 1-9.
- [3] Chen, T., und Francis, B. A.: Stability of sampled data systems. Systems Control Group Report, 1989.
- [4] Chen, T., und Francis, B. A.: On the  $\mathcal{L}_2$  induced norm of a sampled-data system. Systems Control Group Report, 1990.
- [5] Desoer, C. A., und Vidyasagar, M.: Feedback systems: input-output properties. Academic Press, New York 1975.
- [6] Francis, B. A., und Georgiou, T. T.: Stability theory for linear time-invariant plants with periodic digital controller. IEEE Trans. Aut. Control AC-33 (1988), S. 820-832.
- [7] Francis, B. A.: A course in  $H_\infty$  control theory. Springer-Verlag, Berlin 1987.
- [8] Franklin, G. F., und Powell, J. D.: Digital control of dynamic systems. Verlag: Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1980.
- [9] Keller, J. P., und Anderson, B. D. O.: A new approach to the discretization of continuous-time controllers. Proc. ACC, San Diego 1990.
- [10] Keller, J. P., und Anderson, B. D. O.:  $H_\infty$  optimal controller discretization. Int. Journal of Robust and Nonlinear Control 1, (1991), S. 125-137.
- [11] Khargonekar, P. P., Poolla, K., und Tannenbaum, A.: Robust control of linear time-invariant plants using periodic compensation. IEEE Trans. Aut. Control AC-30 (1985), S. 1088-1096.
- [12] Moore, B. C.: Principal component analysis in linear systems: controllability, observability and model reduction. IEEE Trans. Aut. Control AC-26 (1981), S. 17-32.
- [13] Safonov, M. G., Chiang, R. Y., und Flashner, H.:  $H_\infty$  control synthesis for a large space structure. Proc. ACC, Atlanta 1988.

Manuskriptingang: 12. März 1992.



## 1. MATHMOD Vienna

Unter diesem Namen findet vom 2. bis 4. Februar 1994 an der Technischen Universität Wien eine internationale Tagung zur mathematischen Modellbildung für verschiedenste Systemtypen (statische oder dynamische, deterministische oder stochastische, kontinuierliche oder zeitdiskrete, mit konzentrierten oder verteilten Parametern behaftete, lineare oder nichtlineare, andere denkbare) statt. Dabei wird der Begriff „Mathematisches Modell“ sowohl auf klassische Beschreibungen, wie Differential- und Differenzgleichungen, Markov-Pro-

zesse, ARMA-Modelle, als auch auf neue Ansätze, wie Bond-Graphen oder Petri-Netze, angewendet und somit recht weit gespannt.

Themenschwerpunkte sind u. a.:

- Theorie der Modellbildung
- Modellbildung und Simulation
- Qualitative Modellbildung und assoziativ lernende Netzwerke
- Verfahren der Modellvalidierung
- Modellvereinfachung und Ordnungsreduktion
- Anwendungen
- Beziehungen zwischen Modelltyp und Problemlösung
- Ausbildung in der Modellierung.

Weitere Informationen sind erhältlich bei:

Univ. Prof. Dr. Inge Troch, TU Wien, Wiedner Hauptstraße 8-10, A-1040 Wien.