Bei Veränderungen der Regelstreckenparameter bewirkt die SSA eine Verkleinerung der Veränderung des Führungsverhaltens. Dadurch ergibt sich bei einem für bestimmte Streckenparameter ausgelegten Regler für einen relativ großen Bereich der Streckenparameter ein brauchbares Führungsverhalten. Das hat folgende Vorteile:

1. Die Bestimmung der Streckenparameter (z.B. durch Identifikation oder durch Berechnung aus physikalischen Zusammenhängen) muß nicht so genau sein und der dafür erforderliche Aufwand kann verkleinert werden.

2. Bei sich im Betrieb ändernden Streckenparametern wird sich die in manchen Fällen erforderliche adaptive Regeleinrichtung durch die weniger aufwendige SSA ersetzen lassen.

Die SSA zum Zwecke der Verbesserung des Störungs- und Führungsverhaltens scheint auf Grund weiterer Überlegungen auch bei nichtlinearen Strecken und auch bei nichtlinearen Regelkreisen einsetzbar zu sein.

Am leichtesten wird sich die SSA bei Regelstrecken anwenden lassen, die von elektronischen Reglern oder von Prozeßrechnern geregelt werden, da in diesen Fällen die Realisierung der SSA und damit der Modellregelstrecke sowie der Kompensationsfunktion F_Z im allgemeinen ohne großen zusätzlichen Aufwand möglich sein dürfte.

Literatur

[1] *Leonhard, W.:* Einführung in die Regelungstechnik. Verlag Vieweg u. Sohn, Braunschweig 1969, S. 201–204.

[2] *Samal, E.:* Verbesserung der Regelgüte durch Störgrößenaufschaltung. Regelungstechnik 5 (1957) S. 40–45 und S. 154–158.

[3] *Philippow, E.:* Taschenbuch der Elektrotechnik. Bd. 2 Starkstromtechnik. 2. Auflage, VEB Verlag Technik Berlin, S. 1145.

Wissenschaftliche Originalarbeit • Research Paper
Kurzfassung 016/76 • Abridged Version 016/76

On the root distribution of a real polynomial with respect to the unit circle

Zur Wurzelverteilung eines reellen Polynoms bezogen auf den Einheitskreis

By B.D.O. ANDERSON, Newcastle, Australia,
E.I. JURY, Berkeley, California (USA), and Newcastle, Australia,
and L.F. CHAPPARO, Berkeley, California (USA)

Based on Cauchy indices, information is obtained relating to the root distribution of a real polynomial with respect to the unit circle. Included in the formulation are the critical cases (i.e. when roots are on the unit circle or reciprocal of each other). This work constitutes generalization of the earlier results of *Nour Eldin* [1].

It is shown that when the coefficients of the real polynomial satisfy certain linear inequalities, the root distribution test is much simplified. A special case arises in checking the stability of linear discrete systems (or checking when all the roots of the real polynomial are inside the unit circle). The latter result parallels the reduced Schur-Cohn criterion developed earlier [2].

Manuskripteingang: 4. Februar 1975.

1. Counting zeros inside the unit circle

In this section as well as the following ones we only present the final formulas; the detailed derivations can be obtained from the full text of the paper of the same title available from the editor.

(*a*) We assume, for the moment, that the even degree real polynomial $P(z)$ has no zeros on $|z| = 1$. Writing

$$P(z) = \sum_{k=-m}^{m} a_k z^{m+k}, \quad a_m = 1. \tag{1}$$

The number of roots inside the unit circle, K is given by:

$$K - m = \mathop{I}_{-1}^{1} \frac{P_2(x)}{P_1(x)}, \tag{2}$$

where I denotes the Cauchy Index of a rational function and $P_1(x)$, $P_2(x)$ are given respectively bey

$$P_1(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{P(z)}{z^m} + \frac{P(z^{-1})}{z^{-m}}\right], \tag{3}$$

$$P_2(x) = \frac{1}{z - z^{-1}}\left[\frac{P(z)}{z^m} - \frac{P(z^{-1})}{z^{-m}}\right] \tag{4}$$

with $\quad x = \dfrac{z + z^{-1}}{2}.$

(*b*) To allow for roots on the unit circle, we have for an arbitrary real monic polynomial $P(z)$ of degree $2m$ with $P(1)P(-1) \neq 0$, with K zeros inside $|z| < 1$ and $2\tilde{m}$ zeros in $|z| = 1$,

$$\overset{1}{\underset{-1}{I}} \frac{P_2(x)}{P_1(x)} = K + \tilde{m} - m. \tag{5}$$

Remarks

1. In the above formulas we assumed the polynomial $P(z)$ had even degree. Should an odd degree $P(z)$ be prescribed, one may count the zeros inside the unit circle of $zP(z)$, which has even degree.
2. Zeros of $P(z)$ at $z = \pm 1$ can be readily tested for, and, if they exist, can be removed before applying (5).
3. From equation (5) we can easily deduce the stability condition: i.e. all roots of $P(z)$ lie inside the unit circle if and only if

$$\overset{1}{\underset{-1}{I}} \frac{P_2(x)}{P_1(x)} = m \tag{6}$$

or equivalently

$$\overset{\infty}{\underset{-\infty}{I}} \frac{(1 \pm x)P_2(x)}{P_1(x)} = m. \tag{7}$$

2. Simplification of counting of zeros inside the unit circle

Suppose that for the two polynomials P_1 and P_2 the following holds:

(*a*) P_1 does not change sign on $[1, \infty)$ and $(-\infty, -1]$, but may become zero on these intervals,

(*b*) $\qquad P_1(1)P_1(-1) \neq 0$,

(*c*) $P_1(x)$ and $P_2(x)$ have on real common zeros on $[1, \infty)$ or $(-\infty, -1]$.

Then

$$\overset{1}{\underset{-1}{I}} \frac{P_2(x)}{P_1(x)} = \overset{+\infty}{\underset{-\infty}{I}} \frac{(1+x)P_2(x)}{P_1(x)} = \overset{+\infty}{\underset{-\infty}{I}} \frac{(1-x)P_2(x)}{P_1(x)}. \tag{8}$$

Remarks

1. The formulas (8) simplify the calculation of $\overset{1}{\underset{-1}{I}} \frac{P_2}{P_1}$. Evaluation of this quantity is essentially equivalent to evaluating *one* Cauchy index over $(-\infty, \infty)$. For a discussion of methods of evaluating a Cauchy index we refer to *Gantmacher* [3].
2. $P_1(x)$ can be guaranteed to have no zeros on $[1, \infty)$ and $(-\infty, 1]$ by imposing inequalities on linear combinations of the coefficients of $P(z)$, as arise in the reduced Schur-Cohn criterion [2], while $P_1(1)P_1(-1)$ is guaranteed nonzero if and only if $P(1)P(-1)$ is nonzero.
3. The formula (8) is essentially equivalent to the reduced Schur-Cohn criterion.
4. The various computational algorithms for the formulas introduced above are discussed in the full text of the paper, where connections to other stability criteria are also discussed.

3. Conclusion

In this paper a new method, based on use of the Cauchy index, to obtain information on the root distribution of a real polynomial with respect to the unit circle is presented. Simplifications are made for the stability problem.

References

[1] *Nour Eldin, H.A.*: Ein neues Stabilitäts-Kriterium für abgetastete Regelsysteme. Regelungstechnik und Prozeß-Datenverarb. 19 (1971) Heft 7, pp. 301–307.

[2] *Anderson, B.D.O.; Jury, E.I.*: A simplified Schur-Cohn Test. IEEE Trans. on Automatic Control AC-18 (2) (1973) pp. 157–163.

[3] *Gantmacher, F.R.*: The Theory of Matrices. Vol. II. New York: Chelsea 1959.

Die vollständige Originalfassung dieser Arbeit kann beim R. Oldenbourg Verlag GmbH, Abteilung Zeitschriften-Herstellung, Postfach 801360, 8000 München 80 angefordert werden. Lieferung erfolgt nur gegen Vorauszahlung. Preis je Originalarbeit DM 27.– einschließlich 5,5% Mehrwertsteuer und Versandspesen. Postscheckkonto München 57938–806 (R. Oldenbourg Verlag GmbH, München 80). Der Bestellung kann auch ein Verrechnungsscheck beigelegt werden. Lieferzeit – durch schubweise Erledigung der eingehenden Bestellungen – bis zu acht Wochen. Das Manuskript der Originalfassung enthält 25 Schreibmaschinenseiten und 9 Literaturhinweise.