The 19th SICE Symposium on Dynamical System Theory
Octover 30 ～ November 1 1996, Hamamatsu
Preprints

第19回 Dynamical System Theory
シ ン ポ ジ ウ ム

期　日：1996年10月30日㈬・31日㈭・11月1日㈮
会　場：静　岡　大　学　工　学　部
（Shizuoka University）

SICE
covers
Sensing Instrument Control Engineering
Systems Information Computer Ergonomics

1996

企画：制　御　理　論　部　会
主催：（社）計　測　自　動　制　御　学　会
（The Society of Instrument and Control Engineers）
協賛：Tokyo Chapter of IEEE Control Systems Society

カタログ番号 96 SY 0012

拡張 H_∞ 制御 − H_∞ サーボ問題と H_∞ 推定問題の解法 −

東京工業大学 美多　勉、忻 欣、富山仁博、ANU Brian D. O. Anderson

Extended H_∞ Control – Solutions to H_∞ Servo and Estiomation Problems –

T. Mita, Xin Xin, K. Tomiyama (TIT), Brian D. O. Anderson (ANU)

Abstract This paper solves H_∞ control problems for plants having unstable weighting functions and applies the results to H_∞ servo and estimation problems.

1　はじめに

H_∞制御理論が登場して以来、H_∞制御が産業に応用される機会が多いが、H_∞制御理論は未だ整備されていない問題を持つ。その一つが不安定重みを持つH_∞制御問題であり、不安定極を虚軸上のものに限定すれば、この問題はH_∞サーボ問題を含み [4]、不安定なものに注目すれば、制御対象が不安定な場合のH_∞推定問題やLTR問題を含む [10],[11]。

重みが$j\omega$極を持つH_∞制御問題に対しては、筆者らのグループは様々な見地から研究してきた。まとめると以下のようになる。

1. 文献 [3] の一般化H_∞制御は証明が複雑で、しかも、制御系や制御器の構造も明らかでない。

2. 文献 [4],[2] ではこの点を改良し、m H_∞サーボ問題に解を与えた。だだし、重みの$j\omega$極を制御器が極の一部として持つための十分条件 ($C_2V=0$、$UB_2=0$) を導入して数式展開をしたため、この条件がなくてもH_∞制御問題が可解か否か分からず、H_∞推定問題やLTR問題にも適用できない。

3. 文献 [5] ではこの問題を解決し、文献 [3] 同等の結果を得ている。しかし、必要条件の証明が複雑であると言う問題があった。

そこで、本論文では、まず文献 [6],[7],[8] で示した**総合安定**なる概念を使い、重みに不安定極がある制御系に対するH_∞制御問題を**拡張**H_∞**制御**として一般的に解く。そして、拡張H_∞制御器の構造を調べ、重みの不安定極が拡張H_∞ 制御器の極となる条件を示し、最後に応用としてH_∞サーボ問題とH_∞推定問題を扱うことにする。

なお、H_∞推定問題に対する本論文の解法では、制御対象が重みとして扱われるため、これが不安定でも標準H_∞制御の解を形式的かつ直接的に利用できる点で、従来の方法 [11], [10] より優れている。

記号の約束として、LFT 形式のスター積

$$F_l(M_1,F_l(M_2,K))=F_l(M,K)$$

を満たすMを$M=M_1*M_2$と記述する。また、変換行列Tによる相似変換で次の操作をすることと定義する。

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|c} T^{-1}AT & T^{-1}B \\ \hline CT & D\end{array}\right]$$

2　準備と標準 H_∞ 制御問題

本論文で考察する一般化プラントは

$$\begin{aligned}\dot{x}&=Ax+B_1w+B_2u\\ z&=C_1x+D_{12}u\\ y&=C_2x+D_{21}w\end{aligned}\tag{1}$$

あるいは

$$G(s)=\tag{2}$$

$$\begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s)\\ G_{21}(s) & G_{22}(s)\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2\\ \hline C_1 & 0 & D_{12}\\ C_2 & D_{21} & 0\end{array}\right]$$

で記述されるものとする。ここで、xは状態変数、wは外部入力、uは操作量、zは制御量、yは観測量である。また、

$$u=K(s)y\tag{3}$$

が制御則であり、制御目的は後で述べる意味で制御系を安定化し、かつ、閉ループ系のwからzまでの伝達関数

$$G_{zw}=F_l(G,K)=G_{11}+G_{12}K(I-G_{22}K)^{-1}G_{21}\tag{4}$$

のH_∞ノルムを1未満、すなわち、

$$G_{zw}(s)\in BH_\infty\tag{5}$$

とするものである。

また、本論文を通し、D_{12}は列フルランク、D_{21}は行フルランクと仮定し

$$\begin{bmatrix} D_{12}^{\dagger}\\ D_{12}^{\perp}\end{bmatrix}(D_{12},(D_{12}^{\perp})^T)=I,\begin{bmatrix} D_{21}\\ (D_{21}^{\perp})^T\end{bmatrix}(D_{21}^{\dagger},D_{21}^{\perp})=I$$

を満たす$D_{12}^{\dagger}, D_{12}^{\perp}, D_{21}^{\dagger}, D_{21}^{\perp}$を定義しておく。なお、$D_{12}$が正方のときには$D_{12}^{\perp}=0$、$D_{21}$が正方なときには、$D_{21}^{\perp}=0$とおく。上式の各行列は正方だから掛け算の順番を交換して整理すれば

$$(D_{12}^{\perp})^TD_{12}^{\perp}=I-D_{12}D_{12}^{\dagger},\quad D_{21}^{\perp}(D_{21}^{\perp})^T=I-D_{21}^{\dagger}D_{21}$$

が成り立ち、以下特に注意せず利用する。

さて、H_∞制御問題を解くに当たり、以下の仮定が良く知られている。

A1) (A,B_2)は可安定

第19回Dynamical System Theory シンポジウム　(1996・10・30〜11・1・浜松)

A2) $G_{12}(s)$ は $j\omega$ 不変零点を持たない。すなわち、

$$(A - B_2 D_{12}^{\dagger} C_1, D_{12}^{\perp} C_1) \tag{6}$$

は不可観測な $j\omega$ 極を持たない。

および

B1) (A, C_2) は可検出

B2) $G_{21}(s)$ は $j\omega$ 不変零点を持たない。すなわち

$$(A - B_1 D_{21}^{\dagger} C_2, B_1 D_{21}^{\perp}) \tag{7}$$

は不可制御な $j\omega$ 極を持たない。

これらの仮定のもとで、G と K からなる閉ループ系 (G, K) を内部安定にし、かつ、(5) 式を満たす問題は**標準 H_∞ 制御**として知られており、その解は次の定理で与えられる。

定理 1 (標準 H_∞ 制御の解)

仮定 *A1)*、*A2)*、*B1)*、*B2)* のもとで、H_∞ 制御問題の可解条件は以下の *1.*〜*3.* が成り立つことである。

1. $$X(A - B_2 D_{12}^{\dagger} C_1) + (A - B_2 D_{12}^{\dagger} C_1)^T X \tag{8}$$

$$+X(B_1 B_1^T - B_2 E_{12}^{-1} B_2^T)X + C_1^T (D_{12}^{\perp})^T D_{12}^{\perp} C_1 = 0$$

が次の A_X を安定にする意味で安定化解 $X \geq 0$ を持つ。

$$A_X = A - B_2 D_{12}^{\dagger} C_1 + (B_1 B_1^T - B_2 E_{12}^{-1} B_2^T) X \tag{9}$$

ただし、$E_{12} = D_{12}^T D_{12}$。

2. $$Y(A - B_1 D_{21}^{\dagger} C_2)^T + (A - B_1 D_{21}^{\dagger} C_2) Y \tag{10}$$

$$+Y(C_1^T C_1 - C_2^T E_{21}^{-1} C_2)Y + B_1 D_{21}^{\perp} (D_{21}^{\perp})^T B_1^T = 0$$

が次の A_Y を安定にする意味で安定解 $Y \geq 0$ を持つ。

$$A_Y = A - B_1 D_{21}^{\dagger} C_2^T + Y(C_1^T C_1 - C_2^T E_{21}^{-1} C_2) \tag{11}$$

ただし、$E_{21} = D_{21} D_{21}^T$。

3. $$\rho(YX) < 1 \tag{12}$$

また、以上の可解条件が成り立つとき、H_∞ 制御器は次式で与えられる。

$$K_\infty(s) = F_l(M^\infty(s), N(s)) \tag{13}$$

ただし、$M^\infty(s)$ は

$$M^\infty(s) = \left[\begin{array}{c|cc} \hat{A} & -ZL_\infty & Z\hat{B}_2 E_{12}^{-1/2} \\ \hline F_\infty & 0 & E_{12}^{-1/2} \\ -E_{21}^{-1/2}\hat{C}_2 & E_{21}^{-1/2} & 0 \end{array}\right] \tag{14}$$

$$\begin{aligned} :\ \hat{A} &= A + B_1 B_1^T X + B_2 F_\infty + Z L_\infty \hat{C}_2 \\ F_\infty &= -D_{12}^{\dagger} C_1 - E_{12}^{-1} B_2^T X \\ L_\infty &= -B_1 D_{21}^{\dagger} - Y C_2^T E_{21}^{-1} \\ \hat{B}_2 &= B_2 + Y C_1^T D_{12}, \quad \hat{C}_2 = C_2 + D_{21} B_1^T X \\ Z &= (I - YX)^{-1} \end{aligned} \tag{15}$$

で与えられ、$N(s) \in BH_\infty$ は自由パラメータである。■

3 総合安定と拡張 H_∞ 制御

3.1 総合安定と総合安定化器の表現

本論文では以下一般化プラント $G(s)$ が図 1 のように、u に結合されないが、w に直結された重み $W_w(s)$、あるいは、y に結合されないが、z に直結された重み $W_z(s)$ を持ち、しかも、これらが不安定極を持つ場合を考える。ただし、これらの重みは最小実現されているとする。

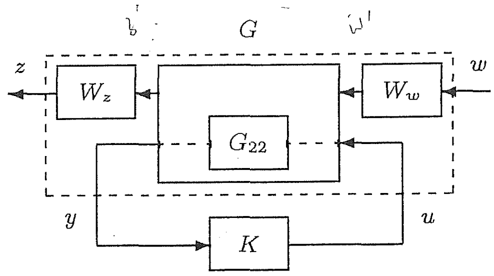

Fig.1 入力重み W_w と出力重み W_z

不安定極を数式表現するため、W_w、W_z を

$$W_w(s) = \left[\begin{array}{c|c} \hat{A}_w & \hat{B}_w \\ \hline \hat{C}_w & \hat{D}_w \end{array}\right], \quad W_z(s) = \left[\begin{array}{c|c} \hat{A}_z & \hat{B}_z \\ \hline \hat{C}_z & \hat{D}_z \end{array}\right]$$

とし、さらに、A_w、A_z を夫々、$\hat{A}_w$、$\hat{A}_z$ のすべての不安定固有値とその固有構造を抜出した行列とする。すなわち、適当な列フルランク行列 T_w、行フルランク行列 T_z によって、

$$\hat{A}_w T_w = T_w A_w, \quad T_z \hat{A}_z = A_z T_z \tag{16}$$

が成り立ち、$Re(\lambda_i(A_w)) \geq 0$、$Re(\lambda_i(A_z)) \geq 0$ を満たすものとする。すると、図 1 に関する条件から以下が成り立つ。

1. $\lambda_i(A_w)$ は (A, B_1) の可制御モードであるが、(A, B_2) の不安定な不可制御モードである。
2. $\lambda_i(A_z)$ は (A, C_1) の可観測モードであるが、(A, C_2) の不安定な不可観測モードである。

この場合、仮定 A1)、あるいは、B1) が成り立たず、対応する H_∞ 制御問題は標準問題とならない。本論文の目的はこの場合でも (5) 式を満たす H_∞ 制御問題を拡張 H_∞ 制御として定式化し、解を与えることである。

まず、仮定 A1) や B1) が成り立たない場合、(G, K) からなる閉ループ系は内部安定にはできないが、不安定重みは制御器の設計に使うものであり、実際にハードウエアで実現するものでない。よって、(G_{22}, K) からなる物理的な閉ループ系だけを内部安定にすれば十分である。これを [4] では**実質安定**と言った。また、(5) 式が達成されるためには、実質安定を保ちつつ、このような不安定モードが閉ループ系の零点で相殺され

$$G_{zw}(s) \in RH_\infty \tag{17}$$

となり、H_∞ ノルムが定義できることが必要である。これは、A_w を z からの不可観測モード、A_z を w からの不可制御モードにするように $K(s)$ を設計することに当たる。実質安定、かつ、(17) 式が成り立つとき、**総合安定**と言い、総合安定を達成する $K(s)$ を**総合安定化器**と言う [7],[8]。

よって、本論文での H_∞ 制御問題は総合安定化器 $K(s)$ の中で (5) 式を満たすものを見つけることとなる。これを**拡張 H_∞ 制御**と言い、対応する制御器を**拡張 H_∞ 制御器**と言う。

以下、総合安定に関しての従来の結果を紹介するとともに、拡張 H_∞ 制御が解けるために必要な前提条件を求めて見よう。

まず、上の **1**、**2** の考察に鑑み、仮定 A1), B1) を以下のものに替える。

A1') (A, B_2) の不可制御かつ不安定な極は $\lambda_i(A_w)$ に限られる。

B1') (A, C_2) の不可観測かつ不安定な極は $\lambda_i(A_z)$ に限られる。

C1') (A, B_2, C_2) は不可制御、かつ、不可観測な不安定モードを持たない。

ここで、仮定 C1') は $\lambda_i(A_w)$ と $\lambda_i(A_z)$ を区別するために導入したものである。また、仮定 A1'),C1') は $\lambda_i(A_z)$ が (A, B_2) の可制御極であること、仮定 B1'),C1') は $\lambda_i(A_w)$ が (A, C_2) の可観測極であることを保証し、開ループ系 (実制御対象) の零点が重みの不安定極を消去することがないことを意味している。すると、次の定理を得る [7]。

定理 2 (総合安定と総合安定化器)

仮定 *A1'), B1'), C1')* が成り立つとする。すると以下が成り立つ。

1. 総合安定化器が存在するため必要十分条件は

$$(A - B_2 D_{12}^\dagger C_1)V = VA_w, \quad D_{12}^\perp C_1 V = 0 \tag{18}$$

を満たす列フルランクな V と、

$$U(A - B_1 D_{21}^\dagger C_2) = A_z U, \quad UB_1 D_{21}^\perp = 0 \tag{19}$$

を満たす行フルランクな U が存在することである。

2. 第 *1* 項が成り立つとき総合安定化器は次式で与えられる。

$$K(s) = F_l(M, Q) \tag{20}$$

ただし

$$M = \left[\begin{array}{c|cc} A + B_2F + HC_2 & -H & B_2 \\ \hline F & 0 & I \\ C_2 & -I & 0 \end{array}\right], Q) \tag{21}$$

また、$Q(s)$ は $Q \in RH_\infty$ を満たす任意な伝達関数で、F は

$$F = -D_{12}^\dagger C_1 + \alpha \quad : \alpha V = 0 \tag{22}$$

を満たし、$A + B_2F$ の $\lambda_i(A_w)$ 以外の固有値を安定にする任意の係数であり、H は

$$H = -B_1 D_{21}^\dagger + \beta \quad : U\beta = 0 \tag{23}$$

を満たし、$A + HC_2$ の $\lambda_i(A_z)$ 以外の固有値を安定にする任意の係数である。■

(注意 1) 総合安定化器の形式は従来の安定化器 [2] と同一である。また、(20) 式を (4) 式に代入し、$G^Q = G * M$ を計算すると、以下が成り立つ。

$$G_{zw} = F_l(G^Q, Q) \tag{24}$$

$$G^Q = \left[\begin{array}{cc|cc} A + B_2F & -B_2F & B_1 & B_2 \\ 0 & A + HC_2 & B_1 + HD_{21} & 0 \\ \hline C_1 + D_{12}F & -D_{12}F & 0 & D_{12} \\ 0 & -C_2 & -D_{21} & 0 \end{array}\right]$$

3.2 拡張 H_∞ 制御と拡張 H_∞ 制御器

さて、(18) 式、(19) 式は G_{12}、G_{21} が夫々 $\lambda_i(A_w)$、$\lambda_i(A_z)$ を不変零点にすることを意味している。しかし、この条件は標準 H_∞ 制御の前提条件 A2),B2) に反する。そこで、拡張 H_∞ 制御問題の前提条件として A1'),B1'), C1') の他に以下の条件を課す。

A2') (18) 式が成り立ち、$G_{12}(s)$ は $\lambda_i(A_w)$ を不変零点とする。しかし、$\lambda_i(A_w)$ から導かれる可能性のあるもの以外、$G_{12}(s)$ は $j\omega$ 不変零点を持たない。

B2') (19) 式が成り立ち、$G_{21}(s)$ は $\lambda_i(A_z)$ を不変零点とする。しかし、$\lambda_i(A_z)$ から導かれる可能性のあるもの以外、$G_{21}(s)$ は $j\omega$ 不変零点を持たない。

次にリカッチ方程式の擬似安定化解について定義しておく。

定義 1 (疑似安定化解)

1. *(8)* 式の実対称解で、$XV = 0$ を満たし、かつ、*(9)* 式の A_X の固有値で $\lambda_i(A_w)$ 以外のものが安定であるとする。これを、*(8)* 式の**擬似安定化解**と言う。

2. *(10)* 式の実対称解で $UY = 0$ を満たし、かつ、*(11)* 式の A_Y の固有値で $\lambda_i(A_z)$ 以外のものが安定であるとする。これを、*(10)* 式の**擬似安定化解**と言う。■

なお、疑似安定化解は存在すれば唯一であることが知られている [2], [4]。また、$\lambda_i(A_w)$(あるいは、$\lambda_i(A_z)$) が存在しないときには、疑似安定化解 X(あるいは、Y) は安定化解となる。この疑似安定化解を使えば次の主要定理を得る。

定理 3 (拡張 H_∞ 制御の解)

1. 仮定 *A1'), A2'), B1'), B2'), C1')* のもとで、拡張 H_∞ 制御問題の可解条件は、*(8)* 式と *(10)* 式が夫々疑似安定化解、$X \geq 0$ と $Y \geq 0$ を持ち、かつ、*(12)* 式 が成り立つことである。

2. 可解条件が成り立つとき、H_∞ 制御器は *(13)* 式以下で X、Y を擬似安定化解に代えたもので与えられる。■

この定理は、重みの極として開右半面にあるものまで許し、かつ、$C_2V = 0$、$UB_2 = 0$ 等の制約条件を付けない一般的なものであり、この点で [4] の拡張となっている。

3.3 擬似安定化解の構造

ここでは、正準系を導入し、擬似安定化解 X、Y の構造を調べておく。

まず、(18) 式の V の補助基底として V_2 を

$$T = (V, V_2) \tag{25}$$

が正則になるように選ぶと

$$\begin{aligned} T^{-1}(A - B_2 D_{12}^\dagger C_1)T &= \begin{bmatrix} A_w & A_{w2} \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \\ D_{12}^\perp C_1 T &= (0, \gamma) \end{aligned} \tag{26}$$

の形式におけるので、これに合わせて

$$T^{-1}B_1 = \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{12} \end{bmatrix}, \quad T^{-1}B_2 = \begin{bmatrix} B_{21} \\ B_{22} \end{bmatrix} \tag{27}$$

とおいておく。すると、仮定 A1'), A2') から (A_2, B_{22}) は可安定、(A_2, γ) は虚軸上で可観測となる。

一方、$XV=0$ の条件から擬似安定化解は

$$T^T XT = \mathrm{diag}(0, X_2) \geq 0 \tag{28}$$

の形式を満たさなければならない。そこで、(8) 式に T^T、Tを左右からかけたものに (28) 式を代入すると、その唯一非零の第 (2,2) ブロックは

$$\begin{aligned} &X_2A_2 + A_2^T X_2 \\ &+X_2(B_{12}B_{12}^T - B_{22}E_{12}^{-1}B_{22}^T)X_2 + \gamma^T\gamma = 0 \end{aligned} \tag{29}$$

となる。すると、(8) 式が疑似安定化解 $X \geq 0$ を持つとき、$X_2 \geq 0$ は (29) 式の安定化解となる。なぜならば、

$$T^{-1}A_X T = \begin{bmatrix} A_w & * \\ 0 & A_{X_2} \end{bmatrix} \tag{30}$$

ただし

$$A_{X_2} = A_2 + (B_{12}B_{12}^T - B_{22}E_{12}^{-1}B_{22}^T)X_2 \tag{31}$$

が成り立つので、疑似安定化解の定義から A_{X_2}は安定でなくてはならない。ここで、$*$は適当な行列である (以下同様)。また、逆に、(29) 式が安定化解 $X_2 \geq 0$ を持つとき、(28) 式を満たす $X \geq 0$ は (8) 式の擬似安定化解である。

なお、(29) 式が安定化解 $X_2 \geq 0$ を持つとき

$$A_2 - B_{22}E_{12}^{-1}B_{22}^T X_2 \tag{32}$$

も安定である [2]。そこで

$$\alpha = -E_{12}^{-1}B_2^T X \tag{33}$$

とおくと、(15) 式中の F_∞は (22) 式と定理 2を満たす Fの一つとなる。なぜならば、

$$T^{-1}(A + B_2F_\infty)T \tag{34}$$

$$= \begin{bmatrix} A_w & A_{w2} - B_{21}E_{12}^{-1}B_{22}^T X_2 \\ 0 & A_2 - B_{22}E_{12}^{-1}B_{22}^T X_2 \end{bmatrix}$$

において、$\lambda_i(A_w)$ 以外は安定となるからである。

また、双対として、(19) 式の Uの補助基底として U_1を

$$U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U \end{bmatrix} \tag{35}$$

が正則になるように選ぶと

$$\begin{aligned} S(A - B_1D_{21}^\dagger C_2)S^{-1} &= \begin{bmatrix} A_1 & A_{1z} \\ 0 & A_z \end{bmatrix} \\ SB_1D_{12}^\perp &= \begin{bmatrix} \delta \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{36}$$

の形式におけるので、これに合わせて次式のようにおく。

$$C_1S^{-1} = (C_{11}, C_{12}), \quad C_2S^{-1} = (C_{21}, C_{22}) \tag{37}$$

すると、仮定 B1')、B2') から、(A_1, C_{21}) は可検出、(A_1, δ) 虚軸上で可制御となる。

一方、$UY=0$ の条件から擬似安定化解は

$$SYS^T = \mathrm{diag}(Y_1, 0) \geq 0 \tag{38}$$

の形式を満たさなければならない。そこで、(10) 式に S、S^Tを左右からかけたものに (38) 式を代入すると、その唯一非零の第 (1,1) ブロックは

$$\begin{aligned} &Y_2A_1^T + A_1Y_1 \\ &+Y_1(C_{11}^TC_{11} - C_{21}^TE_{21}^{-1}C_{21})Y_1 + \delta\delta^T = 0 \end{aligned} \tag{39}$$

となる。すると、以上の双対として、(10) 式が疑似安定化解 $Y \geq 0$ を持つとき、(39) 式は安定化解 $Y_1 \geq 0$ を持ち、逆に、(39) 式が安定化解 $Y_1 \geq 0$ を持つと、(38) 式を満たす $Y \geq 0$ は (10) 式の擬似安定化解となる。

なお、(12) 式が安定化解 $Y_1 \geq 0$ を持つとき、

$$A_1 - C_{21}^TE_{21}^{-1}C_{21} \tag{40}$$

も安定なので、上の双対として、

$$\beta = -YC_2^TE_{21}^{-1} \tag{41}$$

ととれば、(15) 式中の L_∞が (23) 式と定理 2を満たす Hの一つとなることが分かる。

4 定理 3 の必要性の証明

総合安定を経由して定理 3の必要条件の証明を行う。

ただし、以下の 2 章では記述の簡単化を狙って

$$E_{12} = D_{12}^TD_{12} = I, \quad E_{21} = D_{21}D_{21}^T = I \tag{42}$$

を仮定する。同様に、(25) 式、(35) 式において、T、Sが直交行列 ($T^{-1} = T^T$, $S^{-1} = S^T$) で

$$\begin{aligned} T^TT &= \begin{bmatrix} V^T \\ V_2^T \end{bmatrix}(V, V_2) = I \\ SS^T &= \begin{bmatrix} U_1 \\ U \end{bmatrix}(U_1^T, U^T) = I \end{aligned} \tag{43}$$

を満たすように、V、Uの大きさとその補空間の基底を選んであるものとする。このように制御対象に対する座標変換を変えても、疑似安定化解の唯一性から結論は変らない。

スッテプ 1

総合安定化された (24) 式から不可観測な A_w、不可制御な A_zを除き、残された系に、制御器を Q と考えた標準 H_∞制御を適用し、(8) 式が疑似安定化解 $X \geq 0$ を持たなくてはならないことを示す。

G の総合安定を達成する (22) 式の Fは

$$\alpha(V, V_2) = (0, F_2) \tag{44}$$

の形式を満たすので、(25) 式〜(27) 式の正準形式のもとで

$$\begin{aligned} T^T(A + B_2F)T &= \begin{bmatrix} A_w & A_{w2} + B_{21}F_2 \\ 0 & A_2 + B_{22}F_2 \end{bmatrix} \\ (C_1 + D_{12}F)T &= (0, C_{F_2}) \\ C_{F_2} &:= (D_{12}^\perp)^T\gamma + D_{12}F_2 \end{aligned} \tag{45}$$

とおける。ただし、定理 2から $A_2 + B_{22}F_2$は安定でなくてはならない。

次に、G の総合安定を達成する (23) 式の Hにおいて

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U \end{bmatrix}\beta = \begin{bmatrix} H_1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{46}$$

の形式を得るので、(35) 式〜(37) 式のもとで

$$S(A + HC_2)S^T = \begin{bmatrix} A_1 + H_1C_{21} & A_{1z} + H_1C_{22} \\ 0 & A_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} S(B_1 + HD_{21}) &= \begin{bmatrix} B_{H_1} \\ 0 \end{bmatrix} \\ B_{H_1} &= \delta(D_{21}^\perp)^T + H_1D_{21} \end{aligned} \tag{47}$$

となる。また、$A_1 + H_1C_{21}$は定理 2から安定である。

以上の準備のもとに、(24) 式の G^Qに

$$\mathrm{diag}(T, S^T) \tag{48}$$

で表わされる相似変換を行えば

$$G^Q =$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cc} A_w & * & * & * & B_{11} & B_{21} \\ 0 & A_2+B_{22}F_2 & -B_{22}FU_1^T & * & B_{12} & B_{22} \\ 0 & 0 & A_1+H_1C_{21} & * & B_{H_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_z & 0 & 0 \\ \hline 0 & C_{F_2} & -D_{12}FU_1^T & * & 0 & D_{12} \\ 0 & 0 & -C_{21} & -C_{22} & -D_{21} & 0 \end{array}\right]$$

となる。本式から不可観測、不可制御な不安定部分を取り除けば次式を得る。

$$G^Q = \left[\begin{array}{cc|cc} A_2+B_{22}F_2 & -B_{22}FU_1^T & B_{12} & B_{22} \\ 0 & A_1+H_1C_{21} & B_{H_1} & 0 \\ \hline C_{F_2} & -D_{12}FU_1^T & 0 & D_{12} \\ 0 & -C_{21} & -D_{21} & 0 \end{array}\right] \tag{49}$$

となる。

一方、(A_2, γ) は虚軸上で可観測、(A_2, B_{22}) は可安定、$A_1 + H_1C_{21}$は安定、の 3 つの条件から、(49) 式の G^Qは仮定 A1)、A2) を満たしていることが分かる。よって、$G_{zw} = F_l(G_Q, Q) \in BH_\infty$となるためには、標準問題の (8) 式に対応するリカッチ方程式が安定化解を持たなくてはならない。この解を X^Qとおいてリカッチ方程式を求めると

$$\begin{aligned} &X^Q \begin{bmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & A_1+H_1C_{21} \end{bmatrix} + \text{第 1 項の転置} \\ &+X^Q \left[\begin{bmatrix} B_{12} \\ B_{H_1} \end{bmatrix} (B_{12}^T, B_{H_1}^T) - \begin{bmatrix} B_{22} \\ 0 \end{bmatrix} (B_{22}^T, 0) \right] X^Q \\ &\qquad + \begin{bmatrix} \gamma \\ 0 \end{bmatrix} (\gamma^T, 0) = 0 \end{aligned} \tag{50}$$

となる。$A_1 + H_1C_2$は安定で、本式において

$$\begin{bmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & A_1+H_1C_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} (A_1 + H_1C_{21})$$
$$(\gamma^T, 0) \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} = 0$$

が成り立つので、**付録 2** から、非負の安定化解が存在すれば

$$X^Q = \mathrm{diag}(X_2, 0) \geq 0 \tag{51}$$

の形式とならなくてはならない。ここで、$X_2 \geq 0$ は (29) 式の解であり、同式の安定化解でなくてはならない。このとき (28) 式から

$$X = T\mathrm{diag}(0, X_2)T^T = V_2X_2V_2^T \geq 0 \tag{52}$$

が (8) 式の擬似安定化解となる。なお、$V_2^TV_2 = I$から次の関係式も成り立つ。

$$V_2^TX = X_2V_2^T, \quad V_2^TXV_2 = X_2 \tag{53}$$

スッテプ 2

ここでは、擬似安定化解 $Y \geq 0$ の存在と$\rho(XY) < 1$ が必要なことを述べる。

まず、(45) 式から

$$V_2^T(A + B_2F) = (A_2 + B_{22}F_2)V_2^T$$
$$C_1 + D_{12}F = C_{F_2}V_2^T$$

を得、(27) 式において

$$\begin{bmatrix} V^T \\ V_2^T \end{bmatrix} B_1 = \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{12} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} V^T \\ V_2^T \end{bmatrix} B_2 = \begin{bmatrix} B_{21} \\ B_{22} \end{bmatrix}$$

が成り立つ。同様に、双対として、(47) 式から

$$(A + HC_2)U_1^T = U_1^T(A_1 + H_1C_{21})$$
$$B_1 + HD_{21} = U_1^TB_{H_1}$$

を得、(37) 式において次式が成り立つ。

$$C_1(U_1^T, U^T) = (C_{11}, C_{12}), \quad C_2(U_1^T, U^T) = (C_{21}, C_{22})$$

そこで、以上に注目して

$$T^Q := \begin{bmatrix} I & V_2^TU_1^T \\ 0 & I \end{bmatrix} \tag{54}$$

の相似変換を (49) 式に施すと、

$$\begin{aligned} &(A_2 + B_{22}F_2)V_2^TU_1^T - B_{22}FU_1^T \\ &\qquad -V_2^TU_1^T(A_1 + H_1C_{21}) \\ &= V_2^T(A + B_2F)U_1^T - B_{22}FU_1^T \\ &\qquad -V_2^T(A + HC_2)U_1^T \\ &= -V_2^THC_2U_1^T \end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned} &B_{12} - V_2^TU_1^TB_{H_1} \\ &\quad = V_2^TB_1 - V_2^T(B_1 + HD_{21}) = -V_2^THD_{21} \\ &C_{F_2}V_2^TU_1^T - D_{12}FU_1^T \\ &\quad = (C_1 + D_{12}F)U_1^T - D_{12}FU_1^T = C_1U_1^T \end{aligned}$$

などの計算から、G^Qの別の表現として

$$G^Q = \tag{55}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} A_2+B_{22}F_2 & -V_2^THC_2U_1^T & -V_2^THD_{21} & B_{22} \\ 0 & A_1+H_1C_{21} & B_{H_1} & 0 \\ \hline C_{F_2} & C_1U_1^T & 0 & D_{12} \\ 0 & -C_{21} & -D_{21} & 0 \end{array}\right]$$

が成り立つことが確かめられる。

一方、(A_1, δ) は虚軸上で可制御、(A_1, C_{21}) は可検出、$A_2 + B_{22}F_2$は安定、の 3 つの条件から、G^Qは仮定 B1)、B2) を満たしていることも確かめられる。よって、この G^Qに対して H_∞制御問題が解けるためには (10) 式に対応するリカッチ方程式が安定化解を持たなくてはならない。この解を$\tilde{Y}^Q$とすると

$$\begin{aligned} &\text{第 2 項の転置} + \begin{bmatrix} A_2+B_{22}F_2 & 0 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix} \tilde{Y}^Q \\ &+\tilde{Y}^Q \left[\begin{bmatrix} C_{F_2}^T \\ U_1C_1^T \end{bmatrix} (C_{F_2}, C_1U_1^T) - \begin{bmatrix} 0 \\ C_{21}^T \end{bmatrix} (0, C_{21}) \right] \tilde{Y}^Q \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \delta\delta^T \end{bmatrix} = 0 \end{aligned}$$

となり、$A_2 + B_{22}F_2$の安定性から、付録 2 の双対として、安定化解は

$$\tilde{Y}^Q = \mathrm{diag}(0, Y_1) \geq 0 \tag{56}$$

の形式となり、しかも、$Y_1 \geq 0$ は (39) 式を満たし、その安定化解でなくてならない。このとき、(38) 式から

$$Y = S^T \mathrm{diag}(Y_1, 0) S = U_1^T Y_1 U_1 \geq 0 \tag{57}$$

は (10) 式の擬似安定化解となる。さらに、$U_1 U_1^T = I$ から

$$Y U_1^T = U_1^T Y_1, \quad U_1 Y U_1^T = Y_1 \tag{58}$$

が成り立つ。

一方、(54) 式の相似変換を施す前の座標系 (X^Q と同じ座標系) では、

$$\begin{aligned} Y^Q &= T^Q \check{Y}^Q T^{Q^T} \\ &= \begin{bmatrix} V_2^T U_1^T Y_1 U_1 V_2 & V_2^T U_1^T Y_1 \\ Y_1 U_1 V_2 & Y_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} V_2^T Y V_2 & V_2^T Y U_1^T \\ U_1 Y V_2 & U_1 Y U_1^T \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{59}$$

となる。よって

$$Y^Q X^Q = \begin{bmatrix} V_2^T Y V_2 X_2 & 0 \\ U_1 Y V_2 X_2 & 0 \end{bmatrix} \tag{60}$$

を得、標準 H_∞ 制御のもう一つの条件から次式となる。

$$\begin{aligned} &\rho(Y^Q X^Q) = \rho(V_2^T Y V_2 X_2) \\ &= \rho(Y V_2 X_2 V_2^T) = \rho(YX) < 1 \end{aligned} \tag{61}$$

5 定理 3 の十分条件の証明

前章の続きとして、定理 1から (49) 式の G^Q に対する標準 H_∞ 制御器 Q を求めると

$$Q_\infty = F_l(R^\infty, N) \quad : N \in BH_\infty \tag{62}$$

の形式を得、これを (21) 式に代入すると、制御器は総合安定、かつ、$G_{zw} \in BH_\infty$ を達成する。

一方、一般に $K = F_l(M, Q)$ において、K から Q を逆算すると

$$Q = F_l(JM^{-1}J, K) \quad : J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix} \tag{63}$$

となる [9](付録 1 参照)。そこで、(13) 式の K_∞ の Q 表現を求めるため、K_∞ を本式の K に代入すると、

$$Q_\infty = F_l(JM^{-1}J * M^\infty, N) \tag{64}$$

となる。よって

$$R^\infty = JM^{-1}J * M^\infty \tag{65}$$

が示せれば、定理 3で示した (13) 式の制御器は拡張 H_∞ 制御器であることが分かる。ただし、$N \in BH_\infty$ の符号は自由なので、(65) 式において、$(R_{21}^\infty, R_{22}^\infty)$ の符号は左辺と比して反転していても良い。

ステップ 1

R^∞ を求めよう。まず、総合安定化を達成する F、H として 3.3 節で示したように

$$\begin{aligned} F = F_\infty : \quad &\text{or} \quad F_2 = -B_{22}^T X_2 \\ H = L_\infty : \quad &\text{or} \quad H_1 = -Y_1 C_{21}^T \end{aligned} \tag{66}$$

と選べる。以下、F、H をそのように選んだとし、F_∞、L_∞ を F、H と同一とみなす。また、

$$\begin{aligned} B_{H_1} &= U_1(B_1 + L_\infty D_{21}) \\ C_{F_2} &= (C_1 + D_{12} F_\infty) V_2 \end{aligned} \tag{67}$$

に注意する。

そして、前章の続きとして (49) 式の G^Q を一般化プラントと考え、定理 1を適用し、(15) 式中の各係数に添字 Q を付して表すと

$$\begin{aligned} &F_\infty^Q = (0, F_\infty U_1^T), \quad L_\infty^Q = \begin{bmatrix} -V_2^T L_\infty \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\hat{C}_2^Q = (-D_{21} B_1^T X V_2, -C_2 U_1^T) \\ &\hat{B}_2^Q = \begin{bmatrix} V_2^T \hat{B}_2 \\ U_1 Y C_1^T D_{12} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{68}$$

となる。ただし、$XV = 0$、$UY = 0$、その転置、および、(43) 式より得られる

$$\begin{aligned} V_2 V_2^T X = (I - VV^T) X = X \\ Y U_1^T U_1 = Y(I - U^T U) = Y \end{aligned} \tag{69}$$

を適用し、各係数を次元縮小前のものを使って整理した。

さらに

$$\begin{aligned} Z^Q &= (I - Y^Q X^Q)^{-1} := \begin{bmatrix} Z_1 & 0 \\ Z_{21} & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (I - V_2^T Y V_2 X_2)^{-1} & 0 \\ U_1 Y V_2 X_2 (I - V_2^T Y V_2 X_2)^{-1} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{70}$$

を得るが、$V_2^T V_2 = I$ と

$$\begin{aligned} Z &= (I - YX)^{-1} = I + Y(I - XY)^{-1} X \\ &= I + YX(I - YX)^{-1} = I + YXZ \end{aligned} \tag{71}$$

から

$$\begin{aligned} Z_1 &= Z_1 V_2^T V_2 = V_2^T (I - Y V_2 X_2 V_2^T)^{-1} V_2 \\ &= V_2^T (I - YX)^{-1} V_2 = V_2^T Z V_2 \\ Z_{21} &= Z_{21} V_2^T V_2 = U_1 Y V_2 X_2 V_2^T Z V_2 \\ &= U_1 Y X Z V_2 = U_1 (Z - I) V_2 \end{aligned}$$

が成り立つ。

よって

$$\begin{aligned} \hat{A}^Q = &\begin{bmatrix} V_2^T (A + B_2 F_\infty) V_2 & -V_2^T B_2 F U_1^T \\ 0 & U_1 (A + L_\infty C_2) U_1^T \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} V_2^T B_1 \\ U_1 (B_1 + L_\infty D_{21}) \end{bmatrix} (B_1^T V_2, *) \begin{bmatrix} V_2^T X V_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} V_2^T B_2 \\ 0 \end{bmatrix} (0, F_\infty U_1^T) \\ &+ \begin{bmatrix} V_2^T Z V_2 & 0 \\ U_1 (Z - I) V_2 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2^T L_\infty \\ 0 \end{bmatrix} (D_{21} B_1^T X V_2, C_2 U_1^T) \end{aligned} \tag{72}$$

を得るが、(69) 式、(71) 式を使って得られる

$$\begin{aligned} V_2^T Z V_2 V_2^T = V_2^T Z \\ U_1 (Z - I) V_2 V_2^T = U_1 (Z - I) \end{aligned} \tag{73}$$

を使って整理すると、R^∞ として次式を得る。

$$R^\infty = \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} V_2^T (A_X + Z L_\infty D_{21} B_1^T X) V_2 \\ U_1 (B_1 + Z L_\infty D_{21}) B_1^T X V_2 \end{matrix} & \begin{matrix} V_2^T Z L_\infty C_2 U_1^T \\ U_1 (A + Z L_\infty C_2) U_1^T \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 \\ D_{21} B_1^T X V_2 \end{matrix} & \begin{matrix} F_\infty U_1^T \\ C_2 U_1^T \end{matrix} \end{array} \right] \tag{74}$$

$$\left.\begin{array}{cc} V_2^T Z L_\infty & V_2^T Z\hat{B}_2 \\ U_1(Z-I)L_\infty & U_1(Z\hat{B}_2 - B_2) \\ \hline 0 & I \\ I & 0 \end{array}\right]$$

ステップ 2

$JM^{-1}J*M^\infty$を求め、R^∞と一致することを示す。まず、$F=F_\infty$、$H=L_\infty$とおくと

$$JM^{-1}J = \left[\begin{array}{c|cc} A & L_\infty & B_2 \\ \hline -F_\infty & 0 & I \\ C_2 & -I & 0 \end{array}\right] \tag{75}$$

を得るので

$$\begin{aligned} & JM^{-1}J*M^\infty \\ &= \left[\begin{array}{cc|cc} A & B_2F_\infty & L_\infty & B_2 \\ -ZL_\infty C_2 & \hat{A} & ZL_\infty & Z\hat{B}_2 \\ \hline -F_\infty & F_\infty & 0 & I \\ C_2 & -\hat{C}_2 & -I & 0 \end{array}\right] \end{aligned} \tag{76}$$

となる。次に

$$\begin{bmatrix} I & -I \\ I & 0 \end{bmatrix} \tag{77}$$

の相似変換を施すと、上は次式となる。

$$\left[\begin{array}{cc|} A_X + ZL_\infty D_{21}B_1^TX & ZL_\infty C_2 \\ (B_1 + ZL_\infty D_{21})B_1^TX & A + ZL_\infty C_2 \\ \hline 0 & F_\infty \\ -D_{21}B_1^TX & -C_2 \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{cc} ZL_\infty & Z\hat{B}_2 \\ (Z-I)L_\infty & Z\hat{B}_2 - B_2 \\ \hline 0 & I \\ -I & 0 \end{array}\right]$$

最後に、(71) 式から$UZ=U$、$UL_\infty = -UB_1D_{21}^\dagger$と、

$$\begin{aligned} & U(Z\hat{B}_2 - B_2) = 0 \\ & U(B_1 + ZL_\infty D_{21}) = UB_1D_{21}^\perp(D_{21}^\perp)^T = 0 \\ & U(A + ZL_\infty C_2)U^T \\ & \quad = U(A - B_1D_{21}^\dagger C_2)U^T = A_z \end{aligned} \tag{78}$$

が成り立つことと、$B_1^TXV = 0$を使って、$\mathrm{diag}(T, S^T)$の相似変換を施すと

$$JM^{-1}J*M^\infty =$$

$$\left[\begin{array}{cc} A_w & * \\ 0 & V_2^T(A_X + ZL_\infty D_{21}B_1^TX)V_2 \\ 0 & U_1(B_1 + ZL_\infty D_{21})B_1^TXV_2 \\ 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & -D_{21}B_1^TXV_2 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{cc|} * & * \\ V_2^TZL_\infty C_2U_1^T & * \\ U_1(A + ZL_\infty C_2)U_1^T & * \\ 0 & A_z \\ \hline F_\infty U_1^T & * \\ -C_2U_1^T & * \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{cc} * & * \\ V_2^TZL_\infty & V_2^TZ\hat{B}_2 \\ U_1(Z-I)L_\infty & U_1(Z\hat{B}_2 - B_2) \\ 0 & 0 \\ \hline 0 & I \\ -I & 0 \end{array}\right]$$

となり、不可観測なA_w、不可制御なA_zを消去すれば、$R_{21}^\infty, R_{22}^\infty$の符号 (最後の行) を除いての$R^\infty$と一致する。

6 H_∞サーボ問題とH_∞推定問題

6.1 H_∞サーボ系の設計

定理 2の続きとして、以下が知られている [6],[7]。

系 1 (総合安定化器の極)

1. 仮定 *A1')*、*B1')*、*C1')* の下で、*(18)* 式の上に

$$C_2V = 0 \tag{79}$$

が成り立つと、総合安定化器は全ての$Q \in RH_\infty$に対して$\lambda_i(A_w)$を極として持つ。

2. 仮定 *A1')*、*B1')*、*C1')* の下で、*(19)* 式の上に

$$UB_2 = 0 \tag{80}$$

が成り立つと、総合安定化器は全ての$Q \in RH_\infty$に対して$\lambda_i(A_z)$を極として持つ。

3. *2*ブロック混合感度問題において、感度関数の重みが不安定極を持つ場合、入力端混合感度問題では第 *1* 項、出力端混合感度問題では第 *2* 項が成り立つ。■

一方、(74) 式のR^∞から求まる (62) 式のQはすべての$N \in BH_\infty$に対して安定である。なぜならば、(49) 式のG^Qは仮定 A1),A2),B1),B2) を満たすので、このQは (49) 式に対する標準H_∞制御器であり、(49) 式を内部安定にしなくてはならない。ところが、$G_{22}^Q = 0$から

$$G_{zw} = F_l(G^Q, Q_\infty) = G_{11}^Q + G_{12}^Q Q_\infty G_{21}^Q \tag{81}$$

が成り立つので、内部安定にする制御器Q^∞も安定である。

よって、拡張H_∞制御器K_∞はすべての$N \in BH_\infty$に対して総合安定化器でもある。これから、系 1の第 1 項、あるいは、第 2 項が成り立ち、かつ、定理 3が成り立つとき、拡張H_∞制御器は重みの不安定極をその極とする。よって、$W_w(s)$、あるいは、$W_z(s)$を目標値、あるいは、外乱のモデルとして選べば、内部モデル原理が成り立つ。通常の使い方では第 3 項から混合感度問題で感度関数の重みにそのようなモデルを含ませてやれば良いことが分かる。特に、この場合、$\lambda_i(A_w)$、あるいは、$\lambda_i(A_z)$は$j\omega$極として選ばれる [4],[2]。

なお、総合安定化器が重みの不安定極をその極として持つための必要十分条件は未だ得られていない。

6.2 H_∞推定問題

H_∞推定問題は制御対象が不安定なときには、標準H_∞制御解から直接導出できなかった [11],[10]。これは、推定問題においては制御対象が重みとして定式化されるからである。しかし、拡張H_∞制御を使えば、この問題が回避され、直接解を得ることができる。

今、図 2 のように、wを制御対象$P(s)$に加わる外乱とし、観測出力が

$$y = P(s)w = [C_2(sI - A)^{-1}B_1 + D_{21}]w \tag{82}$$

と記述できるとする。また、推定したい出力を

$$q = L(s)w = [C_1(sI - A)^{-1}B_1]w \tag{83}$$

とし、安定推定器を$K(s)$を使って、qの推定値を

$$\hat{q} = K(s)y \tag{84}$$

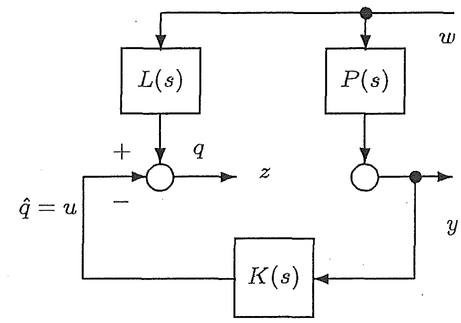

Fig. 2 H_∞**推定問題**

のように発生することを考える。このとき、推定誤差を

$$z = q - \hat{q} \tag{85}$$

とおくと、初期値を0と考えた基本的なH_∞推定問題[11]は

$$\sup_w \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2} < \gamma \tag{86}$$

と定式化される。ただし、以下、$\gamma = 1$とする。

この問題はH_∞制御問題において一般化プラントを

$$G(s) = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & 0 \\ \hline C_1 & 0 & -I \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{array}\right] \tag{87}$$

とした問題に一致する。ただし、以下の仮定を設ける。

D1) (A, C_2)は可検出

D2) D_{21}は行フルランクであり、$G_{21}(s)$は$j\omega$不変零点をもたない

D3) Aは$j\omega$固有値をもたない

さて、図2を図1と較べると、この問題は$G_{22}=0$、$W_z = I$、かつ$W_w(s) = (L(s)^T, P(s)^T)^T$なる入力重みを持つ$H_\infty$制御となる。そこで、$A$中の全ての不安定固有値とその構造を$A_w$で表すと、ある列フルランクな$T_w$に対して

$$AT_w = T_w A_w \tag{88}$$

が成り立つ。このとき、仮定D1), D2)から仮定B1),B2), C1')が成り立つ。また、$\lambda_i(A)$は全て重みの極であることと$B_2 = 0$からA1')が成り立つ。さらに、$D_{12}^{\perp} = 0$から、Aの固有値全体がG_{12}の不変零点になる。しかし、$V = T_w$とおけば、仮定D3と(88)式から仮定A2')が成り立つ。

よって、定理3が使えるが、(8)式において、疑似安定化解は$X = 0$となる。これは、$X = 0$が(8)式を満たし、かつ、$A_X = A$の固有値は$\lambda_i(A_w)$以外安定であるからである。

よって、可解条件は(10)式が安定化解$Y \geq 0$を持つことに等しいことが分かる。このとき、H_∞推定器は(13)式から

$$K_\infty(s) = F_l(M^{est}(s), N(s)) \tag{89}$$

となる。ただし、

$$M^{est}(s) = \left[\begin{array}{c|cc} \hat{A} & -L_\infty & -YC_1^T \\ \hline C_1 & 0 & I \\ -E_{21}^{-1/2}C_2 & E_{21}^{-1/2} & 0 \end{array}\right]$$

$$\hat{A} = A - B_1 D_{21}^{\dagger} C_2 - YC_2^T E_{21}^{-1} C_2$$

7 おわりに

不安定重みを持つ系に対する拡張H_∞制御問題を扱った。本論文の応用範囲は広いと考えられる。

紙面の都合で示せなかったが、重みの不安定極が拡張H_∞制御器の零点となる条件や応用については別途報告する。

参考文献

[1] J. C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar and B. A. Francis: State Space Solutions to Standard H_2 and H_∞ Control Problems, *IEEE Trans. on AC*, **34-8**, 831-847, 1989.

[2] 美多 勉:H_∞制御、昭晃堂、1994

[3] K.Z.Liu and T. Mita, Generalized H_∞ Control Theory, Proc. of ACC, 2245–2249, 1992

[4] 美多、劉、栗山: 虚軸上に極を持つ重みを許すH_∞制御系の設計, *SICE* 論文集, **29-11**, 1320–1329, 1993

[5] K. Kuriyama, B.D.O. Anderson and T. Mita, A Complete Solution to H_∞ Control Problems with Infinite Gain Weightings, Proc. of ECC'95, 183-188, 1995

[6] 美多、富山:不安定重みを持つ拡張制御器の構造、自動制御連合講演会、発表予定、1996.

[7] 美多、劉、富山、張 :不安定重みを有する拡張制御器の構造と拡張H_2制御、*SICE* 論文集、投稿中、DST96で発表予定。

[8] 劉、美多:総合安定化器のパラメトリゼーションと構造, SICE論文集、**32-3**, 320-328, 1996.

[9] 美多, 張: 既約分解を用いないユラパラメトリゼーションの証明法, *SICE* 論文集, **31-4**, 540–541, 1995.

[10] M. Fu: Interpolation approach to H_∞ estimation and its interconnection to loop transfer recovery, *System & Control Lett.*, **17**, 29-36, 1991.

[11] K.M. Nagpal, P.P. Khargonekar: Filtering and Smoothing in an H_∞ Setting, *IEEE Trans. on AC*, **36-2**, 152-166, 1991.

付録1

$AT = TA_{sub}$、$CT = 0$が成り立ち、A_{sub}が安定のとき、

$$XA + A^T X + XRX + C^T C = 0 \tag{A1}$$

の安定化解は$XT = 0$を満たす。証明としては、本式を整理し、右からTをかけると、次式を得るので

$$XTA_{sub} + (A + RX)^T XT = 0 \tag{A2}$$

A_{sub}と$A_X = A + RX$の安定性から$XT = 0$を得る。